

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड राजस्थान, अजमेर

अभ्यास प्रश्न पत्र उच्च माध्यमिक परीक्षा-2022

विषय – गणित

कक्षा–XII

समय : 2 घण्टे 45 मिनट

पूर्णांक : 80

(खण्ड-अ)

Q.1 बहुविकल्पी प्रश्न –

- (i) यदि $f = \{(1,2), (3,5), (4,1)\}$ तथा $g = \{(1,3), (2,3), (5,1)\}$ दो फलन हो, तो फलन $g \circ f$ का परिसर है?
 (A) $\{1,3,4\}$ (B) $\{1,3\}$ (C) $\{1,2,3\}$ (D) $\{2,5\}$ (1 अंक)
- (ii) ज्ञात कीजिए –
 $\sin^{-1}\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right)$
 (A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) इनमें से कोई नहीं (1 अंक)
- (iii) यदि $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ इस प्रकार है कि $A^2 = I$ तब
 (A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (C) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$ (1 अंक)
- (iv) सारणिक $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$ का मान शून्य हो, तो a का मान होगा?
 (A) -3 (B) 2 (C) 1 (D) 3 (1 अंक)
- (v) यदि $y = \sqrt{\sin x + y}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है –
 (A) $\frac{\cos x}{2y-1}$ (B) $\frac{\cos x}{1-2y}$ (C) $\frac{\sin x}{1-2y}$ (D) $\frac{\sin x}{2y-1}$ (1 अंक)
- (vi) यदि $\int_0^a \frac{1}{9x^2+1} dx = \frac{\pi}{12}$, तब a बराबर है –
 (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं (1 अंक)
- (vii) अवकल समीकरण $\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$ का समाकल गुणांक है –
 (A) $\cos x$ (B) $\tan x$ (C) $\sec x$ (D) $\sin x$ (1 अंक)
- (viii) सदिश $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ की दिशा में इकाई सदिश है।
 (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (B) $\sqrt{3}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (D) $\sqrt{2}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (1 अंक)

(ix) तीन व्यक्ति A, B तथा C एक लक्ष्य पर बारी-बारी से निशाना लगाते हैं, यदि A प्रारंभ करें तथा उनके द्वारा लक्ष्य पर निशाना लगाने की प्रायिकता क्रमशः 0.4, 0.3 तथा 0.2 है। दो निशाने लगने की प्रायिकता है – (1 अंक)

- (A) 0.024 (B) 0.188 (C) 0.336 (D) 0.452

(x) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, तब A^n बराबर है – (1 अंक)

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(xi) $\cos^{-1}(2x^2 - 1)$ का $\cos^{-1}x$ के सापेक्ष अवकलज है – (1 अंक)

- (A) 2 (B) $\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{2}{x}$ (D) $1 - x^2$

(xii) दो सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ के मध्य कोण है – (1 अंक)

- (A) 30° (B) 60° (C) $\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{238}}\right)$ (D) 90°

Q.2 रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए –

(i) यदि दो प्रतिलोम फलन f तथा g इस प्रकार है कि उनका संयुक्त फलन gof विद्यमान हो, तो $(gof)^{-1}$ _____ है। (1 अंक)

(ii) यदि $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \frac{\pi}{4}$ तब, $x + y + xy$ का मान _____ है। (1 अंक)

(iii) कोई वर्ग आव्यूह A सममित है यदि..... (1 अंक)

(iv) वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ के लिए, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ पर $\frac{dy}{dx}$ है। (1 अंक)

(v) $\int_0^a \frac{1}{1+4x^2} dx = \frac{\pi}{8}$, तब $a = \dots\dots\dots$ (1 अंक)

(vi) सदिश $6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ की दिक् कोज्याएं हैं..... (1 अंक)

Q.3 अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

(i) यदि $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$ तथा $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 + 5$ तब $(fog)^{-1}(x)$ ज्ञात कीजिए। (1 अंक)

(ii) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right) + \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए। (1 अंक)

(iii) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $A^2 = \lambda A$ तो λ का मान लिखिये। (1 अंक)

(iv) यदि A तथा B , 3 क्रम के आव्यूह हो तथा $|A| = 5$, $|B| = 3$ तब $|3AB|$ बराबर है। (1 अंक)

(v) यदि $y = \tan^{-1}x$ है, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ को केवल y के पदों में ज्ञात कीजिए (1 अंक)

(vi) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$ ज्ञात कीजिए। (1 अंक)

(vii) निम्न अवकल समीकरण हल ज्ञात कीजिए – (1 अंक)

$$x\sqrt{(1+y^2)}dx + y\sqrt{(1+x^2)}dy = 0$$

(viii) समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी आसन्न भुजाएं $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ है – (1 अंक)

(ix) एक सन्दूक में 5 नीली तथा 4 लाल गेंदे हैं। एक गेंद यादृच्छया निकाल कर उसे प्रतिस्थापित नहीं किया जाता है। इसका रंग लिख लिया जाता है इसके बाद यादृच्छया दूसरी गेंद निकाली जाती है। दूसरी गेंद के नीली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। (1 अंक)

(x) आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। (1 अंक)

(xi) सत्यापित कीजिए कि $x + y = \tan^{-1} y$, अवकल समीकरण $y^2 y' + y^2 + 1 = 0$ का एक हल है। (1 अंक)

(xii) यदि सदिश $\vec{a} = 5\hat{i} + \lambda\hat{j}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 9\hat{j}$ समान्तर है, तब λ का मान है – (1 अंक)

(खण्ड-ब)

Q.4 माना $f: \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$, $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$ द्वारा दिया गया है। दर्शाइये कि f एकैकी आच्छादक फलन है (2 अंक)

Q.5 दिया गया है कि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि $2A^{-1} = 9I - A$. (2 अंक)

Q.6 सारणिक के गुणधर्मों का प्रयोग करके सिद्ध करो कि $\begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3$. (2 अंक)

Q.7 यदि $y = \sin(\sin x)$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2 y}{dx^2} + \tan x \frac{dy}{dx} + y \cos^2 x = 0$. (2 अंक)

Q.8 $\int \frac{x-5}{(x-3)^3} e^x dx$ का मान है। (2 अंक)

Q.9 एक पर्स में 3 चाँदी तथा 6 तांबे के सिक्के तथा दूसरे पर्स में 4 चाँदी व 3 तांबे के सिक्के रखे हुये हैं। यदि इन दोनों में से एक पर्स का यादृच्छया चयन करके उसमें से एक सिक्का निकाला जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह एक चाँदी का सिक्का है। (2 अंक)

Q.10 यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $A + B - D = 0$ (शून्य मेट्रिक्स), तो मेट्रिक्स D होगा।

(2 अंक)

Q.11 यदि $x = a(\cos 2t + 2t \sin 2t)$ तथा $y = a(\sin 2t - 2t \cos 2t)$ तो $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ज्ञात कीजिए। (2 अंक)

Q.12 k के किस मान के लिए रेखिकसमीकरण निकाय

$$x + y + z = 2$$

$$2x + y - z = 3$$

$$3x + 2y + kz = 4$$

एक अद्वितीय हल रखता है।

(2 अंक)

Q.13 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$ का मान है।

(2 अंक)

Q.14 अवकल समीकरण $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ जहाँ $y = 0$ जबकि $x = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए।

(2 अंक)

Q.15 सदिश $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ व $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के योग सदिश के सापेक्ष इकाई सदिश के साथ अदिश गुणन 1 के बराबर है। λ का मान ज्ञात कीजिए।

(2 अंक)

Q.16 एक विद्यालय के विद्यार्थियों में से यह ज्ञात है कि 30% विद्यार्थी 100% उपस्थित है तथा 70% विद्यार्थी अनियमित रहते हैं पूर्व वर्षों परिणामों से वार्षिक परीक्षा में 70% विद्यार्थी जो 100% उपस्थिति रखते हैं A ग्रेड प्राप्त करते हैं तथा 10% अनियमित विद्यार्थी A ग्रेड प्राप्त करते हैं। वर्ष के अंत में, यादृच्छया एक विद्यार्थी का चयन किया जाता है और पाया गया है कि वह A ग्रेड प्राप्त करता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह 100% उपस्थिति रखता है।

(2 अंक)

(खण्ड-स)

Q.17 सिद्ध कीजिए कि $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x, \frac{-1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$

अथवा

यदि $\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+4}\right) = \frac{\pi}{4}$, x का मान ज्ञात कीजिए।

(3 अंक)

Q.18 यदि $(x^2 + y^2)^2 = xy$, $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए -

अथवा

यदि $x = a(2\theta - \sin 2\theta)$ तथा $y = a(1 - \cos 2\theta)$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए, जब $\theta = \frac{\pi}{3}$

(3 अंक)

Q.19 $\int \frac{(2x-5)e^{2x}}{(2x-3)^3} dx$ ज्ञात कीजिए।

अथवा

$\int \frac{x^2 + x + 1}{(x^2 + 1)(x + 2)} dx$ ज्ञात कीजिए।

(3 अंक)

Q.20 सदिश \vec{r} तीनों अक्षों से समान कोण पर झुका है तथा जिसका मापांक $3\sqrt{3}$ इकाई है, ज्ञात कीजिए।

अथवा

दो इकाई सदिश \vec{a} तथा \vec{b} के मध्य कोण ज्ञात कीजिए जबकि $\sqrt{3}\vec{a} - \vec{b}$ भी इकाई सदिश है। (3 अंक)

(खण्ड-द)

Q.21 $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ ज्ञात कीजिए।

(4 अंक)

अथवा

$\int \frac{1}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$ ज्ञात कीजिए।

Q.22 अवकल समीकरण $x \frac{dy}{dx} = y - x \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ को हल कीजिए।

अथवा

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{x + y \cos x}{1 + \sin x}\right]$ को हल कीजिए।

(4 अंक)

Q.23 एक थैले X में 4 सफेद व 2 काली गेंदें रखी है जबकि दूसरे थैले Y में 3 सफेद व 3 काली गेंदें रखी है। एक बेग का यादृच्छया चयन कर उसमें से बिना प्रतिस्थापित किये दो गेंदें निकाली जाती है और उनमें से एक सफेद व एक काली पायी जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों गेंदें थैले Y से निकाली गयी है।

अथवा

A तथा B पासो का एक जोड़ा बारी बारी से तब तक फेंकते है जब तक की पासो पर अंको का योग 10 नहीं आता तथा खेल जीतते है। उनके खेल जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि A खेल आरंभ करता है।

(4 अंक)