

VECTORS

- माना $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ है। यदि एक सदिश \vec{c} के लिए $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|$, $|\vec{c} - \vec{a}| = 2\sqrt{2}$ है तथा $(\vec{a} \times \vec{b})$ और \vec{c} के बीच का कोण $\frac{\pi}{6}$ है, तो $[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}]$ का मान है :
 (1) $\frac{2}{3}$ (2) 4 (3) 3 (4) $\frac{3}{2}$
- माना बराबर परिमाण के तीन सदिश \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} परस्पर लंबवत है तथा सदिश $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ के साथ एक समान कोण θ बनाते है, तो $36 \cos^2 2\theta$ बराबर है _____।
- एक त्रिभुज ABC में, यदि $|\overline{BC}| = 3$, $|\overline{CA}| = 5$ तथा $|\overline{BA}| = 7$ हैं, तो सदिश \overline{BA} का \overline{BC} का प्रक्षेप बराबर है:
 (1) $\frac{19}{2}$ (2) $\frac{13}{2}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) $\frac{15}{2}$
- $p > 0$ के लिए, सदिश $\vec{v}_1 = \sqrt{3}p\hat{i} + \hat{j}$ को केन्द्रबिन्दु के गिर्द वामावर्त दिशा में कोण θ से आवर्तित करने पर सदिश $\vec{v}_2 = 2\hat{i} + (p+1)\hat{j}$ प्राप्त होता है। यदि $\tan \theta = \frac{(\alpha\sqrt{3} - 2)}{(4\sqrt{3} + 3)}$ है, तो α का मान बराबर है _____।
- माना एक सदिश \vec{a} , सदिशों $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ के सहतलीय है। यदि \vec{a} , सदिश $\vec{d} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ पर लम्बवत है और $|\vec{a}| = \sqrt{10}$ है, तो $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{d}] + [\vec{a} \ \vec{c} \ \vec{d}]$ का एक संभावित मान है -
 (1) -42 (2) -40 (3) -29 (4) -38

- माना तीन सदिश \vec{a}, \vec{b} तथा \vec{c} , $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$ तथा $|\vec{a}| = 2$ को संतुष्ट करते है। तो निम्न में से कौन सा कथन असत्य है ?
 (1) $\vec{a} \times ((\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c})) = \vec{0}$
 (2) $(\vec{b} \times \vec{c})$ पर \vec{a} का प्रक्षेप 2 है।
 (3) $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}] = 8$
 (4) $|3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}|^2 = 51$
- माना $(2+a+b)\hat{i} + (a+2b+c)\hat{j} - (b+c)\hat{k}$, $(1+b)\hat{i} + 2b\hat{j} - b\hat{k}$ तथा $(2+b)\hat{i} + 2b\hat{j} + (1-b)\hat{k}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ सहतलीय सदिश है। तो निम्न में से कौन-सा कथन सही है ?
 (1) $2b = a + c$ (2) $3c = a + b$
 (3) $a = b + 2c$ (4) $2a = b + c$
- माना $\vec{p} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{q} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ दो सदिश है। यदि सदिश $\vec{r} = (\alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k})$, दोनों सदिशों $(\vec{p} + \vec{q})$ तथा $(\vec{p} - \vec{q})$ के लम्बवत है तथा $|\vec{r}| = \sqrt{3}$ है, तो $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$ बराबर है _____।
- माना a, b तथा c तीन भिन्न धनात्मक संख्याएँ हैं। यदि सदिश $a\hat{i} + a\hat{j} + c\hat{k}$, $\hat{i} + \hat{k}$ तथा $c\hat{i} + c\hat{j} + b\hat{k}$ समतलीय हैं, तो c बराबर है :
 (1) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ (2) $\frac{a+b}{2}$
 (3) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (4) \sqrt{ab}
- यदि $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5$ तथा $|\vec{a} \times \vec{b}| = 8$ हैं, तो $|\vec{a} \cdot \vec{b}|$ बराबर है :
 (1) 6 (2) 4 (3) 3 (4) 5

11. यदि $(\vec{a}+3\vec{b})$, $(7\vec{a}-5\vec{b})$ के लंबवत है तथा $(\vec{a}-4\vec{b})$, $(7\vec{a}-2\vec{b})$ के लंबवत है, तो \vec{a} तथा \vec{b} के बीच का कोण (डिग्री में) है _____।

12. माना $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ हैं। तो सदिश गुणनफल $(\vec{a}+\vec{b})\times\left(\left(\vec{a}\times\left(\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\vec{b}\right)\right)\times\vec{b}\right)$ बराबर है:

(1) $5(34\hat{i}-5\hat{j}+3\hat{k})$ (2) $7(34\hat{i}-5\hat{j}+3\hat{k})$

(3) $7(30\hat{i}-5\hat{j}+7\hat{k})$ (4) $5(30\hat{i}-5\hat{j}+7\hat{k})$

13. माना $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, \vec{b} तथा $\vec{c}=\hat{j}-\hat{k}$ तीन सदिश हैं जिनके लिए $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$ तथा $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ है। यदि सदिश \vec{b} के, सदिश $\vec{a}\times\vec{c}$ पर प्रक्षेप सदिश की लंबाई l है, तो $3l^2$ का मान बराबर है _____।

14. माना तीन सदिशों \vec{a} , \vec{b} तथा \vec{c} के लिए $\vec{a}=\vec{b}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ है। यदि सदिशों \vec{a} , \vec{b} तथा \vec{c} के परिमाण क्रमशः $\sqrt{2}$, 1 तथा 2 हैं और \vec{b} तथा \vec{c} के बीच का कोण θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) है, तो $1 + \tan \theta$ का मान बराबर है :

(1) $\sqrt{3}+1$ (2) 2

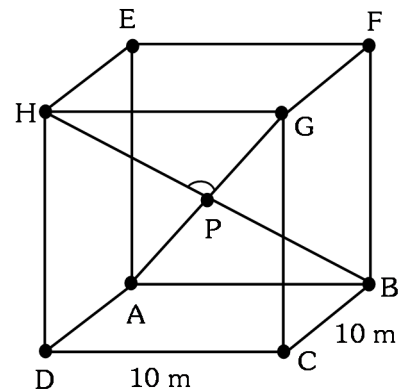
(3) 1 (4) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$

15. माना $\vec{a}=\hat{i}-\alpha\hat{j}+\beta\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{i}+\beta\hat{j}-\alpha\hat{k}$ तथा $\vec{c}=-\alpha\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ हैं, जहाँ α तथा β पूर्णांक हैं। यदि $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$ तथा $\vec{b}\cdot\vec{c}=10$ हैं, तो $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ बराबर है _____।

16. माना $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{j}-\hat{k}$ है। यदि एक सदिश \vec{c} इस प्रकार है कि $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}$ तथा $\vec{a}\cdot\vec{c}=3$ हैं, तो $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ बराबर है :

(1) -2 (2) -6 (3) 6 (4) 2

17. एक हाल के वर्गाकार फर्श की विमा $10\text{m} \times 10\text{m}$ है तथा इसकी दीवारें ऊर्ध्वाधर (चित्र देखिए)। यदि इसके विकर्णों AG तथा BH के बीच न्यून कोण $\text{GPH} = \cos^{-1}\frac{1}{5}$ है, तो हाल की ऊँचाई (मीटर में) है :



(1) 5 (2) $2\sqrt{10}$ (3) $5\sqrt{3}$ (4) $5\sqrt{2}$

18. यदि दो सदिशों $2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ तथा $-\lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ के योग पर सदिश $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ का प्रक्षेप 1 है, तो λ बराबर है _____।

19. माना तीन सदिशों $\vec{a}=\hat{i}+5\hat{j}+\alpha\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+3\hat{j}+\beta\hat{k}$ तथा $\vec{c}=-\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ के लिए $|\vec{b}\times\vec{c}|=5\sqrt{3}$ है तथा सदिश \vec{a} , सदिश \vec{b} के लम्बवत् है। तो $|\vec{a}|^2$ के मानों में अधिकतम मान है _____।

20. समतलों $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=1$ तथा $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+4=0$ की प्रतिच्छेदन रेखा से होकर जाने वाले तथा x-अक्ष के समांतर समतल का समीकरण है :

(1) $\vec{r}\cdot(\hat{j}-3\hat{k})+6=0$ (2) $\vec{r}\cdot(\hat{i}+3\hat{k})+6=0$

(3) $\vec{r}\cdot(\hat{i}-3\hat{k})+6=0$ (4) $\vec{r}\cdot(\hat{j}-3\hat{k})-6=0$

21. माना \vec{a} तथा \vec{b} दो सदिश हैं जिनमें लिए $|2\vec{a} + 3\vec{b}| = |3\vec{a} + \vec{b}|$ है और \vec{a} तथा \vec{b} के बीच का कोण 60° है। यदि $\frac{1}{8}\vec{a}$ एक इकाई सदिश है, तो $|\vec{b}|$ बराबर है:

- (1) 4 (2) 6 (3) 5 (4) 8

22. माना तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ परस्पर लंबवत हैं तथा इनके परिमाण बराबर हैं।

यदि एक सदिश \vec{r} , $\vec{a} \times \{(\vec{r} - \vec{b}) \times \vec{a}\} + \vec{b} \times \{(\vec{r} - \vec{c}) \times \vec{b}\} + \vec{c} \times \{(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{c}\} = \vec{0}$, को संतुष्ट करता है, तो \vec{r} बराबर है :

- (1) $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ (2) $\frac{1}{3}(2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$
 (3) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ (4) $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c})$

23. माना $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ हैं। माना \vec{a} तथा \vec{b} को रखने वाले समतल में एक सदिश \vec{v} है। यदि \vec{v} , सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ के अभिलम्ब है तथा \vec{a} पर उसका प्रक्षेप 19 इकाई है, तब $|2\vec{v}|^2$ बराबर है _____।

24. समतलों $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$ तथा $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j}) = -2$ के प्रतिच्छेदन से तथा बिन्दु (1, 0, 2) से होकर जाने वाले समतल का सदिश समीकरण है :

- (1) $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}) = \frac{7}{3}$ (2) $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}) = 7$
 (3) $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}) = 7$ (4) $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 7\hat{j} + 3\hat{k}) = \frac{7}{3}$

25. माना तीन सदिश \vec{a}, \vec{b} तथा \vec{c} इस प्रकार हैं कि \vec{c} , सदिशों \vec{a} तथा \vec{b} के समतल में है, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 7$ है तथा \vec{b} , सदिश \vec{c} के लम्बवत है, जबकि $\vec{a} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{k}$ हैं, तो $2|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2$ बराबर है _____।

26. माना तीन सदिश $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ दिए गए हैं। यदि \vec{r} एक सदिश है, जिसके लिए $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{c} \times \vec{a}$ तथा $\vec{r} \cdot \vec{b} = 0$, हैं, तो $\vec{r} \cdot \vec{a}$ बराबर है _____।

27. माना $\vec{a} = \hat{i} + \alpha\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - \alpha\hat{j} + \hat{k}$ हैं। यदि समान्तर चतुर्भुज, जिसकी संलग्न भुजायें \vec{a} तथा \vec{b} हैं, का क्षेत्रफल $8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई है, तो $\vec{a} \cdot \vec{b}$ बराबर है _____:

28. यदि दो सदिश $\vec{a}_1 = x\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{a}_2 = \hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ संरेख हैं, तो सदिश $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ के समान्तर एक सम्भव इकाई सदिश है

- (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{j} + \hat{k})$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} - \hat{j})$
 (3) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ (4) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$

29. यदि \vec{a} तथा \vec{b} लंबवत हैं, तो $\vec{a} \times (\vec{a} \times (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})))$ बराबर है:

- (1) $\vec{0}$ (2) $\frac{1}{2}|\vec{a}|^4 \vec{b}$
 (3) $\vec{a} \times \vec{b}$ (4) $|\vec{a}|^4 \vec{b}$

30. माना $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ है। यदि $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{r}$, $\vec{r} \cdot (\alpha\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 3$ तथा $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} - \alpha\hat{k}) = -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ है, तो $\alpha + |\vec{r}|^2$ का मान बराबर है :

- (1) 9 (2) 15
 (3) 13 (4) 11

31. माना सदिशों $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ के लम्बवत एक सदिश \vec{c} है। यदि $\vec{c} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = 8$ है, तो $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ का मान बराबर है _____।

32. माना मूल बिंदु के सापेक्ष सदिश $\sqrt{3}\hat{i} + \hat{j}$ को प्रथम चतुर्थांश में वामावर्त दिशा में 45° के कोण तक घुमाने पर सदिश $\alpha\hat{i} + \beta\hat{j}$ प्राप्त होता है। तो शीर्ष (α, β) , $(0, \beta)$ तथा $(0, 0)$ के त्रिभुज का क्षेत्रफल बराबर है :

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $2\sqrt{2}$

33. माना O मूलबिंदु है। माना $\overline{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\overline{OQ} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3x\hat{k}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ है, जिनके लिए $|\overline{PQ}| = \sqrt{20}$ है तथा सदिश \overline{OP} , सदिश \overline{OQ} के लम्बवत है। यदि $\overline{OR} = 3\hat{i} + z\hat{j} - 7\hat{k}$, $z \in \mathbb{R}$, सदिशों \overline{OP} तथा \overline{OQ} के सहतलीय है, तो $x^2 + y^2 + z^2$ का मान बराबर है:

- (1) 7 (2) 9 (3) 2 (4) 1

34. माना सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ के समतल में एक सदिश \vec{x} है। यदि सदिश \vec{x} , सदिश $(3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ के लम्बवत है तथा इसका \vec{a} पर प्रक्षेप $\frac{17\sqrt{6}}{2}$ है, तो $|\vec{x}|^2$ का मान बराबर है _____।

35. माना $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 7\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ है।

यदि $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{b}$, $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = -3$ हैं,

तो $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$ बराबर है :

- (1) 12 (2) 8 (3) 13 (4) 10

36. यदि $\vec{a} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\beta\hat{i} - \alpha\hat{j} - \hat{k}$

तथा $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ है, जिनके लिए $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$ तथा

$\vec{b} \cdot \vec{c} = -3$ हैं, तो $\frac{1}{3}((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c})$ बराबर है _____.

37. एक आयताकार कार्तीय प्रणाली के सापेक्ष एक सदिश \vec{a} के घटक $3p$ तथा 1 हैं। इस प्रणाली को मूलबिंदु के सापेक्ष वामावर्त दिशा में किसी कोण तक घुमाया जाता है। यदि नई प्रणाली के सापेक्ष \vec{a} के घटक $p+1$ तथा $\sqrt{10}$ है, तो p का एक मान बराबर है :

- (1) 1 (2) $-\frac{5}{4}$ (3) $\frac{4}{5}$ (4) -1

38. एक त्रिभुज ABC, में यदि $|\overline{BC}| = 8$, $|\overline{CA}| = 7$, $|\overline{AB}| = 10$ हैं, तो सदिश \overline{AB} का सदिश \overline{AC} पर प्रक्षेप बराबर है :

- (1) $\frac{25}{4}$ (2) $\frac{85}{14}$ (3) $\frac{127}{20}$ (4) $\frac{115}{16}$

39. माना \vec{a} तथा \vec{b} दो शून्येतर सदिश हैं जो एक दूसरे के लंबवत हैं तथा $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ है। यदि $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|$ है, तो सदिशों $(\vec{a} + \vec{b} + (\vec{a} \times \vec{b}))$ तथा \vec{a} के बीच का कोण बराबर है :

- (1) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (2) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

- (3) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (4) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

40. माना समतल $\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - b = 0$ के सापेक्ष बिन्दु $(1, 3, a)$ का दर्पण प्रतिबिम्ब $(-3, 5, 2)$ है। तो $|a + b|$ का मान बराबर है _____.

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $|\vec{a}| = 3 = a$; $\vec{a} \cdot \vec{c} = c$

Now $|\vec{c} - \vec{a}| = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow c^2 + a^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} = 8$

$\Rightarrow c^2 + 9 - 2(c) = 8$

$\Rightarrow c^2 - 2c + 1 = 0 \Rightarrow c = 1 = |\vec{c}|$

Also, $\vec{a} \times \vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

Given $(\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \sin \frac{\pi}{6}$
 $= (3)(1)(1/2)$
 $= 3/2$

2. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c})$
 $= 3$

$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{3}$

$\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| + |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| \cos \theta$

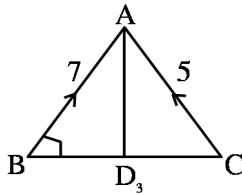
$\Rightarrow 1 = \sqrt{3} \cos \theta$

$\Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 36 \cos^2 2\theta = 4$

3. Official Ans. by NTA (3)

Sol.



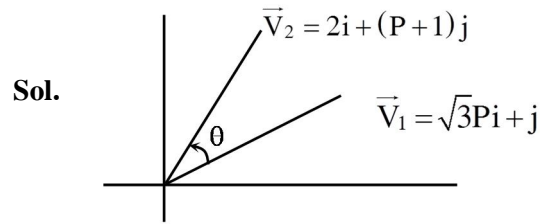
Projection of \vec{BA}

on \vec{BC} is equal to

$= |\vec{BA}| \cos \angle ABC$

$= 7 \left| \frac{7^2 + 3^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 3} \right| = \frac{11}{2}$

4. Official Ans. by NTA (6)



Sol.

$|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$

$3P^2 + 1 = 4 + (P + 1)^2$

$2P^2 - 2P - 4 = 0 \Rightarrow P^2 - P - 2 = 0$

$P = 2, -1$ (rejected)

$\cos \theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|} = \frac{2\sqrt{3}P + (P + 1)}{\sqrt{(P + 1)^2 + 4\sqrt{3}P^2 + 1}}$

$\cos \theta = \frac{4\sqrt{3} + 3}{\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{3} + 3}{13}$

$\tan \theta = \frac{\sqrt{112 - 24\sqrt{3}}}{4\sqrt{3} + 3} = \frac{6\sqrt{3} - 2}{4\sqrt{3} + 3} = \frac{\alpha\sqrt{3} - 2}{4\sqrt{3} + 3}$

$\Rightarrow \alpha = 6$

5. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $\vec{a} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} = \hat{i}(2\lambda + \mu) + \hat{j}(\lambda - \mu) + \hat{k}(\lambda + \mu)$

$\vec{a} \cdot \vec{d} = 0 = 3(2\lambda + \mu) + 2(\lambda - \mu) + 6(\lambda + \mu)$

$\Rightarrow 14\lambda + 7\mu = 0 \Rightarrow \mu = -2\lambda$

$\Rightarrow \vec{a} = (0)\hat{i} - 3\lambda\hat{j} + (-\lambda)\hat{k}$

$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{10}|\lambda| = \sqrt{10} \Rightarrow |\lambda| = 1$

$\Rightarrow \lambda = 1$ or -1

$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$

$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] + [\vec{a} \vec{b} \vec{d}] + [\vec{a} \vec{c} \vec{d}] = [\vec{a} \vec{b} + \vec{c} \vec{d}]$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -3\lambda & \lambda \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$= 3\lambda(12) + \lambda(6) = 42\lambda = -42$

6. Official Ans. by NTA (4)

Sol. (1) $\vec{a} \times ((\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{c}))$
 $= \vec{a} \cdot (-\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{b}) = -2(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))$
 $= -2(\vec{a} \times \vec{a}) = \vec{0}$

(2) Projection of \vec{a} on $\vec{b} \times \vec{c}$

$$= \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{|\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = |\vec{a}| = 2$$

(3) $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] + [\vec{c} \ \vec{a} \ \vec{b}] = 2[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = 2\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$
 $= 2\vec{a} \cdot \vec{a} = 2|\vec{a}|^2 = 8$

(4) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ and $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are mutually \perp vectors.

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c}| \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}| = |\vec{c}| \Rightarrow |\vec{b}| = \frac{|\vec{c}|}{2}$$

Also, $|\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{b}||\vec{c}| = 2 \Rightarrow |\vec{c}| = 2$ & $|\vec{b}| = 1$

$$|3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}|^2 = (3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) \cdot (3\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})$$

$$= 9|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2$$

$$= (9 \times 4) + 1 + (4 \times 4)$$

$$= 36 + 1 + 16 = 53$$

7. Official Ans. by NTA (1)

Sol. If the vectors are co-planar,

$$\begin{vmatrix} a+b+2 & a+2b+c & -b-c \\ b+1 & 2b & -b \\ b+2 & 2b & 1-b \end{vmatrix} = 0$$

Now $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$, $R_1 \rightarrow R_1 - R_2$

$$\text{So } \begin{vmatrix} a+1 & a+c & -c \\ b+1 & 2b & -b \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$= (a+1)2b - (a+c)(2b+1) - c(-2b)$$

$$= 2ab + 2b - 2ab - a - 2bc - c + 2bc$$

$$= 2b - a - c = 0$$

8. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $\vec{p} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ (Given)

$$\vec{q} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{Now } (\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{p} - \vec{q}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \pm \sqrt{3} \frac{((\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{p} - \vec{q}))}{|(\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{p} - \vec{q})|} = \pm \frac{\sqrt{3}(-2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}}$$

$$\vec{r} = \pm(-\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$$

According to question

$$\vec{r} = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}$$

So $|\alpha| = 1$, $|\beta| = 1$, $|\gamma| = 1$

$$\Rightarrow |\alpha| + |\beta| + |\gamma| = 3$$

9. Official Ans. by NTA (4)

Sol. Because vectors are coplanar

$$\text{Hence } \begin{vmatrix} a & a & c \\ 1 & 0 & 1 \\ c & c & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow c^2 = ab \Rightarrow c = \sqrt{ab}$$

10. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = \pm 8$$

$$\sin\theta = \pm \frac{4}{5}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$= 10 \cdot \left(\pm \frac{3}{5}\right) = \pm 6$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = 6$$

11. Official Ans. by NTA (60)

Sol. $(\vec{a} + 3\vec{b}) \perp (7\vec{a} - 5\vec{b})$

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 5\vec{b}) = 0$$

$$7|\vec{a}|^2 - 15|\vec{b}|^2 + 16\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \dots(1)$$

$$(\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (7\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$$

$$7|\vec{a}|^2 + 8|\vec{b}|^2 - 30\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \dots(2)$$

from (1) & (2)

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{b}|}{2|\vec{a}|} \therefore \theta = 60^\circ$$

12. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$$\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = 3\hat{j} + 5\hat{k} ; \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 + 2 + 6 = 7$$

$$((\vec{a} \times ((\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{b})) \times \vec{b})$$

$$((\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{b})) \times \vec{b})$$

$$(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b} - 0)) \times \vec{b}$$

$$(\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})) \times \vec{b}$$

$$((\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b}) \times \vec{b}$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} \times \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \times \vec{b})$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\therefore 7(-\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times (7(-\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}))$$

$$7(0\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) \times (-\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 34\hat{i} - (5)\hat{j} + (3\hat{k})$$

$$\Rightarrow 34\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\therefore 7(34\hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k})$$

13. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

Take Dot with \vec{c}

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2 = 2$$

Projection of \vec{b} or $\vec{a} \times \vec{c} = \ell$

$$\frac{|\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})|}{|\vec{a} \times \vec{c}|} = \ell$$

$$\therefore \ell = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \ell^2 = \frac{4}{6}$$

$$3\ell^2 = 2$$

14. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $\vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$= 1.2\cos\theta\vec{b} - \vec{c}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = 2\cos\theta\vec{b} - \vec{c}$$

$$|\vec{a}|^2 = (2\cos\theta)^2 + 2^2 - 2 \cdot 2\cos\theta \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\Rightarrow 2 = 4\cos^2\theta + 4 - 4\cos\theta \cdot 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2 = -4\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sec^2\theta = 2$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + \tan\theta = 2.$$

15. Official Ans. by NTA (9)

Sol. $\vec{a} = (1, -\alpha, \beta)$

$$\vec{b} = (3, \beta, -\alpha)$$

$$\vec{c} = (-\alpha, -2, 1); \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \Rightarrow 3 - \alpha\beta - \alpha\beta = -1$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = 2$$

$$1 \quad 2$$

$$2 \quad 1$$

$$-1 \quad -2$$

$$-2 \quad -1$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 10$$

$$\Rightarrow -3\alpha - 2\beta - \alpha = 10$$

$$\Rightarrow 2\alpha + \beta + 5 = 0$$

$$\therefore \alpha = -2; \beta = -1$$

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1 + 4) - 2(3 - 4) - 1(-6 + 2)$$

$$= 3 + 2 + 4 = 9$$

16. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $|\vec{a}| = \sqrt{3}; \vec{a} \cdot \vec{c} = 3; \vec{a} \times \vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$

Cross with \vec{a} .

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{a} - a^2\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\Rightarrow 3\vec{a} - 3\vec{c} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\Rightarrow 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k} - 3\vec{c} = -2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{c} = \frac{5\hat{i}}{3} + \frac{2\hat{j}}{3} + \frac{2\hat{k}}{3}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \frac{-10}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = -2$$

17. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $A(\hat{j}) \cdot B(10\hat{i})$

$$\mathbf{H}(\hat{h}\hat{j} + 10\hat{k})$$

$$\mathbf{G}(10\hat{i} + \hat{h}\hat{j} + 10\hat{k})$$

$$\overline{AG} = 10\hat{i} + \hat{h}\hat{j} + 10\hat{k}$$

$$\overline{BH} = -10\hat{i} + \hat{h}\hat{j} + 10\hat{k}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{AG} \cdot \overline{BH}}{|\overline{AG}| |\overline{BH}|}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{h^2}{h^2 + 200}$$

$$4h^2 = 200 \Rightarrow h = 5\sqrt{2}$$

18. Official Ans. by NTA (5)

Sol. $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

$$\vec{b} = (2 - \lambda)\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = 12 - \lambda$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{b}|^2$$

$$\lambda^2 - 24\lambda + 144 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 + 40$$

$$20\lambda = 100 \Rightarrow \lambda = 5.$$

19. Official Ans. by NTA (90)

Sol. since, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$1 + 15 + \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha\beta = -16 \dots (1)$$

Also,

$$|\vec{b} \times \vec{c}|^2 = 75 \Rightarrow (10 + \beta^2)14 - (5 - 3\beta)^2 = 75$$

$$\Rightarrow 5\beta^2 + 30\beta + 40 = 0$$

$$\Rightarrow \beta = -4, -2$$

$$\Rightarrow \alpha = 4, 8$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|_{\max}^2 = (26 + \alpha^2)_{\max} = 90$$

20. Official Ans. by NTA (1)

Sol. Equation of planes are

$$\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - 1 = 0 \Rightarrow x + y + z - 1 = 0$$

$$\text{and } \vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) + 4 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z + 4 = 0$$

equation of planes through line of intersection of these planes is :-

$$(x + y + z - 1) + \lambda (2x + 3y - z + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (1 + 2\lambda)x + (1 + 3\lambda)y + (1 - \lambda)z - 1 + 4\lambda = 0$$

But this plane is parallel to x-axis whose direction are (1, 0, 0)

$$\therefore (1 + 2\lambda)1 + (1 + 3\lambda)0 + (1 - \lambda)0 = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}$$

\therefore Required plane is

$$0x + \left(1 - \frac{3}{2}\right)y + \left(1 + \frac{1}{2}\right)z - 1 + 4\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-y}{2} + \frac{3}{2}z - 3 = 0$$

$$\Rightarrow y - 3z + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r} \cdot (\hat{j} - 3\hat{k}) + 6 = 0} \text{ Ans.}$$

21. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $|3\vec{a} + \vec{b}|^2 = |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2$

$$(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{b}) = (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$9\vec{a} \cdot \vec{a} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = 4\vec{a} \cdot \vec{a} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$5|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} = 8|\vec{b}|^2$$

$$5(8)^2 - 6 \cdot 8 \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ = 8|\vec{b}|^2 \quad \left(\begin{array}{l} \because \frac{1}{8}|\vec{a}| = 1 \\ \Rightarrow |\vec{a}| = 8 \end{array} \right)$$

$$40 - 3|\vec{b}| = |\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{b}|^2 + 3|\vec{b}| - 40 = 0$$

$$|\vec{b}| = -8, \quad |\vec{b}| = 5$$

(rejected)

22. Official Ans. by NTA (3)

Sol. Suppose $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b} + 2\vec{c}$

$$\text{and } |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = k$$

$$\vec{a} \times \{(\vec{r} - \vec{b}) \times \vec{a}\} + \vec{b} \times \{(\vec{r} - \vec{c}) \times \vec{b}\} + \vec{c} \times \{(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{c}\} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow k^2(\vec{r} - \vec{b}) - k^2x\vec{a} + k^2(\vec{r} - \vec{c}) - k^2y\vec{b} + k^2(\vec{r} - \vec{a}) - k^2z\vec{c} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 3\vec{r} - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{r} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2}$$

23. Official Ans. by NTA (1494)

Sol. $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{c} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} \quad \vec{v} \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = 0$$

$$\vec{v} \cdot \hat{a} = 19$$

$$\vec{v} = \lambda \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\vec{v} = \lambda [(\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}]$$

$$= \lambda [(3+4+1)(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) - \left(\frac{6-2-2}{2}\right)(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})]$$

$$= \lambda [16\hat{i} - 8\hat{j} + 16\hat{k} - 2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}]$$

$$\vec{v} = \lambda [14\hat{i} - 12\hat{j} + 18\hat{k}]$$

$$\lambda [14\hat{i} - 12\hat{j} + 18\hat{k}] \cdot \frac{(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})}{\sqrt{4+1+4}} = 19$$

$$\lambda \frac{[28+12+36]}{3} = 19$$

$$\lambda \left(\frac{76}{3}\right) = 19$$

$$4\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{4}$$

$$|2\vec{v}| = \left| 2 \times \frac{3}{4} (14\hat{i} - 12\hat{j} + 18\hat{k}) \right|^2$$

$$\frac{9}{4} \times 4 (7\hat{i} - 6\hat{j} + 9\hat{k})^2$$

$$= 9 (49 + 36 + 81)$$

$$= 9 (166)$$

$$= 1494$$

24. Official Ans. by NTA (3)

$$\text{Sol. } \vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 1$$

$$\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j}) = -2$$

point (1, 0, 2)

Eqⁿ of plane

$$\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) - 1 + \lambda \{ \vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j}) + 2 \} = 0$$

$$\vec{r} \cdot \{ \hat{i}(1+\lambda) + \hat{j}(1-2\lambda) + \hat{k}(1) \} - 1 + 2\lambda = 0$$

$$\text{Point } \hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k} = \vec{r}$$

$$\therefore (\hat{i} + 2\hat{k}) \cdot \{ \hat{i}(1+\lambda) + \hat{j}(1-2\lambda) + \hat{k}(1) \} - 1 + 2\lambda = 0$$

$$1 + \lambda + 2 - 1 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \vec{r} \cdot \left[\hat{i} \left(\frac{1}{3} \right) + \hat{j} \left(\frac{7}{3} \right) + \hat{k} \right] = \frac{7}{3}$$

$$\vec{r} \cdot [\hat{i} + 7\hat{j} + 3\hat{k}] = 7$$

Ans. 3

25. Official Ans. by NTA (75)

$$\text{Sol. Let } \vec{c} = \lambda (\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b}))$$

$$= \lambda ((\vec{b} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{b})$$

$$= \lambda (5(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + 2\hat{i} + \hat{k})$$

$$= \lambda (-3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k})$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 7 \Rightarrow 3\lambda + 5\lambda + 6\lambda = 7$$

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 2 \left| \left(\frac{-3}{2} - 1 + 2 \right) \hat{i} + \left(\frac{5}{2} + 1 \right) \hat{j} + (3 + 1 + 1) \hat{k} \right|^2$$

$$= 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{49}{4} + 25 \right) = 25 + 50 = 75$$

26. Official Ans. by NTA (12)

$$\text{Sol. } (\vec{r} - \vec{c}) \times \vec{a} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{c} + \lambda \vec{a}$$

$$\text{Now, } 0 = \vec{b} \cdot \vec{c} + \lambda \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-\vec{b} \cdot \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{b}} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$\text{So, } \vec{r} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{c} + 2a^2 = 12$$

27. Official Ans. by NTA (2)

$$\text{Sol. } \vec{a} = \hat{i} + \alpha \hat{j} + 3\hat{k}$$

$$\vec{b} = 3\hat{i} - \alpha \hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{area of parallelogram} = |\vec{a} \times \vec{b}| = 8\sqrt{3}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & \alpha & 3 \\ 3 & -\alpha & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(4\alpha) - \hat{j}(-8) + \hat{k}(-4\alpha)$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{64 + 32\alpha^2} = 8\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2 + \alpha^2 = 6 \Rightarrow \alpha^2 = 4$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 - \alpha^2 + 3 = 2$$

28. Official Ans. by NTA (4)

$$\text{Sol. } \vec{a}_1 \text{ and } \vec{a}_2 \text{ are collinear}$$

$$\text{so } \frac{x}{1} = \frac{-1}{y} = \frac{1}{z}$$

unit vector in direction of

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

29. Official Ans. by NTA (4)

$$\text{Sol. } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{b} = -|\vec{a}|^2 \vec{b}$$

$$\text{Now } \vec{a} \times (\vec{a} \times (-|\vec{a}|^2 \vec{b}))$$

$$= -|\vec{a}|^2 (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}))$$

$$= -|\vec{a}|^2 (-|\vec{a}|^2 \vec{b}) = |\vec{a}|^4 \vec{b}$$

30. Official Ans by NTA (2)

Sol. $\vec{r} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{r} \Rightarrow \vec{r} \times (\vec{a} + \vec{b}) = 0$

$\vec{r} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \vec{r} = \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} + 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k})$

$\vec{r} = \lambda(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) \dots(1)$

$\vec{r} \cdot (\alpha\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = 3$

Put \vec{r} from (1) $\alpha\lambda = 1 \dots(2)$

$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} - \alpha\hat{k}) = -1$

Put \vec{r} from (1) $2\lambda\alpha - \lambda = 1 \dots(3)$

Solve (2) & (3)

$\alpha = 1, \lambda = 1$

$\Rightarrow \vec{r} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

$|\vec{r}|^2 = 14 \text{ \& } \alpha = 1$

$\alpha + |\vec{r}|^2 = 15$

31. Official Ans by NTA (28)

Sol. $\vec{c} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$(\vec{a} \times \vec{b}) = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{c} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = \lambda(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k})$

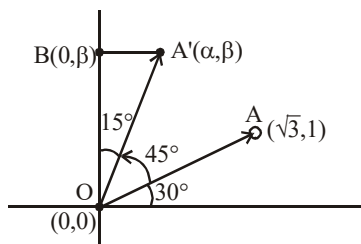
$\Rightarrow \lambda(4) = 8 \Rightarrow \lambda = 2$

$\vec{c} = 2(\vec{a} \times \vec{b})$

$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 2|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 28$

32. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



Area of $\Delta(OA'B) = \frac{1}{2} OA' \cos 15^\circ \times OA' \sin 15^\circ$

$= \frac{1}{2} (OA')^2 \frac{\sin 30^\circ}{2}$

$= (3+1) \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

33. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $\vec{OP} \perp \vec{OQ}$

$\Rightarrow -x + 2y - 3x = 0$

$\Rightarrow y = 2x \dots(i)$

$|\vec{PQ}|^2 = 20$

$\Rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 + (1+3x)^2 = 20$

$\Rightarrow x = 1$

$\vec{OP}, \vec{OQ}, \vec{OR}$ are coplanar.

$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y & -1 \\ -1 & 2 & 3x \\ 3 & z & -7 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & z & -7 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1(-14 - 3z) - 2(7 - 9) - 1(-z - 6) = 0$

$\Rightarrow z = -2$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 1 + 4 + 4 = 9$ **Option (2)**

34. Official Ans. by NTA (486)

Sol. Let $\vec{x} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ (λ and μ are scalars)

$\vec{x} = \hat{i}(2\lambda + \mu) + \hat{j}(2\mu - \lambda) + \hat{k}(\lambda - \mu)$

Since $\vec{x} \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) = 0$

$3\lambda + 8\mu = 0 \dots(1)$

Also Projection of \vec{x} on \vec{a} is $\frac{17\sqrt{6}}{2}$

$\frac{\vec{x} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{17\sqrt{6}}{2}$

$6\lambda - \mu = 51 \dots(2)$

From (1) and (2)

$\lambda = 8, \mu = -3$

$\vec{x} = 13\hat{i} - 14\hat{j} + 11\hat{k}$

$|\vec{x}|^2 = 486$

35. Official Ans. by NTA (1)

$$\text{Sol. } \vec{r} \times \vec{a} - \vec{r} \times \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} \times (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \lambda(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \lambda(-5\hat{i} - 4\hat{j} + 10\hat{k})$$

$$\text{Also } \vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) = -3$$

$$\Rightarrow \lambda(-5 - 8 + 10) = -3$$

$$\lambda = 1$$

$$\text{Now } \vec{r} = -5\hat{i} - 4\hat{j} + 10\hat{k}$$

$$= \vec{r} \cdot (2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$$

$$= -10 + 12 + 10 = 12$$

36. Official Ans. by NTA (2)

$$\text{Sol. } \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \Rightarrow -\alpha\beta - \alpha\beta - 3 = 1$$

$$\Rightarrow -2\alpha\beta = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha\beta = -2} \quad \dots\dots(1)$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = -3 \Rightarrow -\beta + 2\alpha + 1 = -3$$

$$\boxed{\beta - 2\alpha = 4} \quad \dots\dots(2)$$

Solving (1) & (2), $(\alpha, \beta) = (-1, 2)$

$$\frac{1}{3}[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 3 \\ -\beta & -\alpha & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

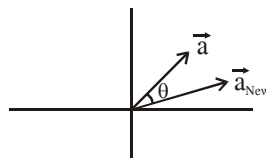
$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}[2(4 - 1)] = 2$$

37. Official Ans. by NTA (4)

$$\text{Sol. } \vec{a}_{\text{Old}} = 3p\hat{i} + \hat{j}$$

$$\vec{a}_{\text{New}} = (p+1)\hat{i} + \sqrt{10}\hat{j}$$



$$\Rightarrow |\vec{a}_{\text{Old}}| = |\vec{a}_{\text{New}}|$$

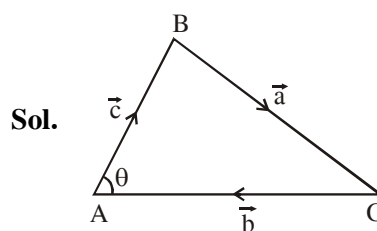
$$\Rightarrow ap^2 + 1 = p^2 + 2p + 1 + 10$$

$$8p^2 - 2p - 10 = 0$$

$$4p^2 - p - 5 = 0$$

$$(4p - 5)(p + 1) = 0 \rightarrow p = \frac{5}{4}, -1$$

38. Official Ans. by NTA (2)



Sol.

$$|\vec{a}| = 8, |\vec{b}| = 7, |\vec{c}| = 10$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2}{2|\vec{b}||\vec{c}|} = \frac{17}{28}$$

Projection of \vec{c} on \vec{b}

$$= |\vec{c}| \cos\theta$$

$$= 10 \times \frac{17}{28}$$

$$= \frac{85}{14}$$

39. Official Ans. by NTA (2)

$$\text{Sol. } |\vec{a}| = |\vec{b}|, |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|, \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin 90^\circ = |\vec{a}| \Rightarrow |\vec{b}| = 1 = |\vec{a}|$$

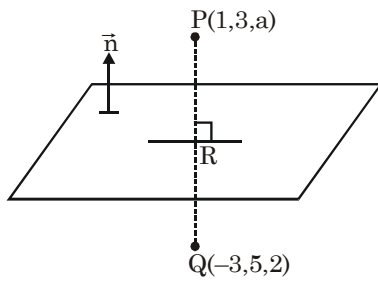
\vec{a} and \vec{b} are mutually perpendicular unit vectors.

$$\text{Let } \vec{a} = \hat{i}, \vec{b} = \hat{j} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \hat{k}$$

$$\cos\theta = \frac{(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot \hat{i}}{\sqrt{3} \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

40. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



$$\text{plane} = 2x - y + z = b$$

$$R \equiv \left(-1, 4, \frac{a+2}{2}\right) \rightarrow \text{on plane}$$

$$\therefore -2 - 4 + \frac{a+2}{2} = b$$

$$\Rightarrow a + 2 = 2b + 12 \Rightarrow a = 2b + 10 \quad \dots(i)$$

$$\langle PQ \rangle = \langle 4, -2, a - 2 \rangle$$

$$\therefore \frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{a-2}$$

$$\Rightarrow a - 2 = 2 \Rightarrow a = 4, b = -3$$

$$\therefore |a + b| = 1$$