SEQUENCE & PROGRESSION

1. यदि श्रेणी $\log_{9^{1/2}} x + \log_{9^{1/3}} x + \log_{9^{1/4}} x + ..., x > 0$ के प्रथम 21 पदों का योग 504 है, तो x बराबर है:

(1) 243 (2) 9 (3) 7 (4) 81

2. माना $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ एक अनुक्रम है, जिसके लिए $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ तथा $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \ \forall \ n \geq 1$ हैं। तो $47\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{3n}}$ बराबर है ________ ।

3. माना एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योग S_n है। यदि $S_{10} = 530$ तथा $S_5 = 140$ है, तो $S_{20} - S_6$ बराबर है –

(1) 1862 (2) 1842 (3) 1852 (4) 1872

4. समुच्चय $\{n \in \{1, 2, ..., 100\} \mid$ n तथा 2040 का महत्तम समापवर्तक 1 है$\}$ के सभी अवयवों का योग बराबर है _______ ।

5. माना एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों का योगफल S_n है। यदि $S_{3n} = 3S_{2n}$ है, तो $\frac{S_{4n}}{S_{2n}}$ बराबर है :

(1) 6 (2) 4 (3) 2 (4) 8

6. यदि

$$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{6}{3^2}+\frac{10}{3^3}+......\infty \text{ तक}\right)^{\log_{(0.25)}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+.......\infty \text{ तक}\right)}$$

का मान l है, तो l^2 बराबर है ________ ।

7. यदि $\log_3 2, \log_3(2^x - 5), \log_3\left(2^x - \frac{7}{2}\right)$ एक समांतर श्रेढ़ी में है, तो x का मान बराबर है ________

8. माना $A = \{n \in \mathbf{N} \mid n^2 \leq n + 10{,}000\}$, $B = \{3k+1 \mid k \in \mathbf{N}\}$ तथा $C = \{2k \mid k \in N\}$ हैं, तो समुच्चय $A \cap (B - C)$ के सभी अवयवों का योगफल बराबर है_____ ।

9. श्रेणी $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{2^2}{x^4+1}+.....+\frac{2^{100}}{x^{2^{100}}+1}$ का योग, जब x = 2 है, है :

(1) $1+\frac{2^{101}}{4^{101}-1}$ (2) $1+\frac{2^{100}}{4^{101}-1}$

(3) $1-\frac{2^{100}}{4^{100}-1}$ (4) $1-\frac{2^{101}}{4^{101}-1}$

10. एक अनन्त GP $a, ar, ar^2, ar^3,...$ का योग 15 है तथा इसके प्रत्येक पद का वर्ग करने का योग 150 है, तो $ar^2, ar^4, ar^6, ...$ का योग है।

(1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{25}{2}$ (4) $\frac{9}{2}$

11. माना $a_1, a_2,....,a_{10}$ एक AP है, जिसका सार्वअंतर –3 है तथा $b_1, b_2,...., b_{10}$ एक GP है, जिसका सार्व अनुपात 2 है। माना $c_k = a_k + b_k$, k = 1,2,..., 10 है। यदि $c_2 = 12$ तथा $c_3 = 13$ है, तो $\sum_{k=1}^{10} c_k$ बराबर है _____

12. यदि $x, y \in \mathbf{R}, x > 0$, के लिए $y = \log_{10}x + \log_{10}x^{1/3} + \log_{10}x^{1/9} + ...$ अनंत पदों तक तथा $\frac{2+4+6+....+2y}{3+6+9+....+3y} = \frac{4}{\log_{10} x}$ हैं, तो क्रमित युग्म (x, y) बराबर है:

(1) $(10^6, 6)$ (2) $(10^4, 6)$

(3) $(10^2, 3)$ (4) $(10^6, 9)$

13. श्रेणी $\frac{3}{1^2\times 2^2}+\frac{5}{2^2\times 3^2}+\frac{7}{3^2\times 4^2}+....$ के 10 पदों का योग है :

(1) 1 (2) $\frac{120}{121}$ (3) $\frac{99}{100}$ (4) $\frac{143}{144}$

14. तीन संख्याऐं एक वर्धमान गुणोत्तर श्रेढ़ी, जिसका सार्व अनुपात r हैं, में है। यदि बीच की संख्या को दुगुना कर दिया जाये, तो नयी संख्याऐं एक समान्तर श्रेढ़ी, जिसका सार्वअंतर d है, में हैं। यदि गुणोत्तर श्रेढ़ी का चौथा पद $3r^2$, है, तो $r^2 - d$ बराबर है :

(1) $7 - 7\sqrt{3}$ (2) $7 + \sqrt{3}$

(3) $7 - \sqrt{3}$ (4) $7 + 3\sqrt{3}$

15. 10 संख्याओं $7 \times 8, 10 \times 10, 13 \times 12, 16 \times 14, \ldots$ का माध्य है _________.

16. माना $a_1, a_2, a_3, \ldots$ एक A.P. है। यदि $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_p} = \frac{100}{p^2}$, $p \neq 10$ हैं, तो $\frac{a_{11}}{a_{10}}$ बराबर है :

(1) $\frac{19}{21}$ (2) $\frac{100}{121}$ (3) $\frac{21}{19}$ (4) $\frac{121}{100}$

17. 4-अंकों की संख्याएँ, जो न तो 7 की गुणज हैं न ही 3 की गुणज हैं, की संख्या है____ ।

18. यदि $S = \frac{7}{5} + \frac{9}{5^2} + \frac{13}{5^3} + \frac{19}{5^4} + \ldots$ है, तो 160 S बराबर है ______ ।

19. माना $S_n = 1 \cdot (n-1) + 2 \cdot (n-2) + 3 \cdot (n-3) + \ldots + (n-1) \cdot 1$, $n \geq 4$ है तो $\sum_{n=4}^{\infty}\left(\frac{2S_n}{n!} - \frac{1}{(n-2)!}\right)$ बराबर है :

(1) $\frac{e-1}{3}$ (2) $\frac{e-2}{6}$ (3) $\frac{e}{3}$ (4) $\frac{e}{6}$

20. माना $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{21}$ समांतर श्रेढ़ी में इस प्रकार हैं कि $\sum_{n=1}^{20} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{4}{9}$ है। यदि इस समांतर श्रेढ़ी का योगफल 189 है, तब $a_6 a_{16}$ बराबर है :

(1) 57 (2) 72 (3) 48 (4) 36

21. माना a, b, c एक समान्तर श्रेढ़ी में है। माना त्रिभुज जिसके शीर्ष बिन्दु (a, c), (2, b) तथा (a, b) है, का केन्द्रक $\left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$ है। यदि समीकरण, $ax^2 + bx + 1 = 0$ के मूल α तथा β हैं, तो $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$ का मान है :

(1) $\frac{71}{256}$ (2) $\frac{69}{256}$

(3) $-\frac{69}{256}$ (4) $-\frac{71}{256}$

22. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के पहले चार पदों का योग $\frac{65}{12}$ है तथा उनके व्युत्क्रमों का योग $\frac{65}{18}$ है। यदि इसके पहले तीन पदों का गुणनफल 1 हो और तीसरा पद α हो, तो 2α बराबर है _______ ।

23. यदि $0 < \theta, \phi < \frac{\pi}{2}, x = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}\theta, y \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n}\phi$, तथा $z = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n}\theta \cdot \sin^{2n}\phi$ हैं तो :

(1) $xy - z = (x + y) z$ (2) $xy + yz + zx = z$

(3) $xyz = 4$ (4) $xy + z = (x + y)z$

24. माना $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots$ वर्ग हैं जबकि प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए, A_n की भुजा की लम्बाई, A_{n+1} के विकर्ण की लम्बाई के बराबर है। यदि A_1 की भुजा की लम्बाई 12 cm है, तो n का न्यूनतम मान, जिसके लिए A_n का क्षेत्रफल एक से कम है, है______ ।

25. श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 6n + 10}{(2n+1)!}$ का योगफल बराबर है :

(1) $\frac{41}{8}e + \frac{19}{8}e^{-1} - 10$

(2) $\frac{41}{8}e - \frac{19}{8}e^{-1} - 10$

(3) $\frac{41}{8}e + \frac{19}{8}e^{-1} + 10$

(4) $-\frac{41}{8}e + \frac{19}{8}e^{-1} - 10$

26. यदि अनुक्रम $-16, 8, -4, 2, \ldots$ के $p^{\text{वें}}$ तथा $q^{\text{वें}}$ पदों के समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य, समीकरण $4x^2 - 9x + 5 = 0$ को सन्तुष्ट करते हैं, तो p + q बराबर है ______.

27. एक वर्धमान गुणोत्तर श्रेणी में, दूसरे तथा छठे पदों का योगफल $\frac{25}{2}$ है और तीसरे तथा पाँचवे पदों का गुणनफल 25 है, तो चौथे, छठे तथा आठवें पदों का योगफल है:

(1) 30 (2) 26 (3) 35 (4) 32

28. अनन्त श्रेणी $1+\frac{2}{3}+\frac{7}{3^2}+\frac{12}{3^3}+\frac{17}{3^4}+\frac{22}{3^5}+...$ का योग बराबर है :

(1) $\frac{13}{4}$ (2) $\frac{9}{4}$ (3) $\frac{15}{4}$ (4) $\frac{11}{4}$

29. माना $\frac{1}{16}$, a तथा b G.P. में है तथा $\frac{1}{a},\frac{1}{b},6$ A.P. में है, जहाँ $a, b > 0$ हैं। तो $72(a+b)$ बराबर है ______।

30. माना $S_n(x)=\log_{a^{1/2}}x+\log_{a^{1/3}}x+\log_{a^{1/6}}x+\log_{a^{1/11}}x+\log_{a^{1/18}}x+\log_{a^{1/27}}x+.....n$ पदों तक, जहाँ $a > 1$ है। यदि $S_{24}(x) = 1093$ तथा $S_{12}(2x) = 265$ हैं, तो a का मान बराबर है _____।

31. एक समान्तर श्रेढ़ी तथा एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के पहले चार पद समुच्चय {11, 8, 21, 16, 26, 32, 4} में से हैं। यदि इन श्रेढ़ियों के अंतिम पद चार अंकों की अधिकतम सम्भव संख्यायें हैं, तो इन दोनों श्रेढ़ियों में होने वाले पदों की संख्या है ______ .

32. यदि एक वास्तविक संख्या x के लिए 1, $\log_{10}(4^x - 2)$ तथा $\log_{10}\left(4^x+\frac{18}{5}\right)$ एक समान्तर श्रेढ़ी में है, तो सारणिक $\begin{vmatrix} 2\left(x-\frac{1}{2}\right) & x-1 & x^2 \\ 1 & 0 & x \\ x & 1 & 0 \end{vmatrix}$ का मान बराबर है.......।

33. यदि α, β धन पूर्णांक हैं, जिनके लिए $100^\alpha - 199\beta = (100)(100) + (99)(101) + (98)(102) +.....+ (1)(199)$ है, तो (α, β) तथा मूलबिंदु से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता है :

(1) 540 (2) 550 (3) 530 (4) 510

34. $\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+...+\frac{1}{(201)^2-1}$ बराबर है :

(1) $\frac{101}{404}$ (2) $\frac{25}{101}$ (3) $\frac{101}{408}$ (4) $\frac{99}{400}$

35. माना एक समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 2n पदों का योगफल S_1 है। माना उसी समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 4n पदों का योगफल S_2 है। यदि $(S_2 - S_1) = 1000$ है, तो इस समांतर श्रेढ़ी के प्रथम 6n पदों का योग बराबर है:

(1) 1000 (2) 7000 (3) 5000 (4) 3000

36. $\left[\frac{x+1}{x^{2/3}-x^{1/3}+1}-\frac{x-1}{x-x^{1/2}}\right]^{10}$, $x \neq 1$, के प्रसार में x से स्वतंत्र पद बराबर है_______।

SOLUTION

1. s = 2log₉ x + 3 log₉ x+ ...... + 22 log₉ x

s = $\log_9 x$ (2 + 3 + ... + 22)

s = $\log_9 x \left\{\frac{21}{2}(2+22)\right\}$

Given $252\log_9 x = 504$

$\Rightarrow \log_9 x = 2 \Rightarrow x = 81$

2. $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, let $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{8^n} = P$

Divide by 8^n we get

$$\frac{a_{n+2}}{8^n} = \frac{2a_{n+1}}{8^n} + \frac{a_n}{8^n}$$

$$\Rightarrow 64\frac{a_{n+2}}{8^{n+2}} = \frac{16a_{n+1}}{8^{n+1}} + \frac{a_n}{8^n}$$

$$64\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}}{8^{n+2}} = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{8^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{8^n}$$

$$64\left(P - \frac{a_1}{8} - \frac{a_2}{8^2}\right) = 16\left(P - \frac{a_1}{8}\right) + P$$

$$\Rightarrow 64\left(P - \frac{1}{8} - \frac{1}{64}\right) = 16\left(P - \frac{1}{8}\right) + P$$

64P – 8 – 1 = 16 P – 2 + P

47P = 7

3. $S_{10} = 530 \Rightarrow \frac{10}{2}\{2a+9d\} = 530$

$\Rightarrow$ 2a + 9d = 106 ….(1)

and $S_5 = 140 \Rightarrow \frac{5}{2}\{2a+4d\} = 140$

$\Rightarrow$ 2a + 4d = 56 …..(2)

$\Rightarrow$ 5d = 50 $\Rightarrow \boxed{d=10} \Rightarrow \boxed{a=8}$

Now, $S_{20} - S_6 = \frac{20}{2}\{2a+19d\} - \frac{6}{2}\{2a+5d\}$

= 14a + 175d

= (14 × 8) + (175 × 10)

= 1862

4. $2040 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 17$

n should not be multiple of 2, 3, 5 and 17.

Sum of all n = (1 + 3 + 5 … + 99) – (3 + 9 + 15 + 21 + … + 99) – (5 + 25 + 35 + 55 + 65 + 85 + 95) – (17)

$= 2500 - \frac{17}{2}(3+99) - 365 - 17$

= 2500 – 867 – 365 – 17

= 1251

5. Let a be first term and d be common diff. of this A.P.

Given $S_{3n} = 3S_{2n}$

$$\Rightarrow \frac{3n}{2}\left[2a+(3n-1)d\right] = 3\frac{2n}{2}\left[2a+(2n-1)d\right]$$

$\Rightarrow$ 2a + (3n – 1)d = 4a + (4n – 2)d

$\Rightarrow$ 2a + (n – 1)d = 0

Now $$\frac{S_{4n}}{S_{2n}} = \frac{\frac{4n}{2}\left[2a+(4n-1)d\right]}{\frac{2n}{2}\left[2a+(2n-1)d\right]} = \frac{2\left[\underbrace{2a+(n-1)d}_{=0}+3nd\right]}{\left[\underbrace{2a+(n-1)d}_{=0}+nd\right]}$$

$$= \frac{6nd}{nd} = 6$$

6. $$\ell = \left(\underbrace{1+\frac{2}{3}+\frac{6}{3^2}+\frac{10}{3^3}}_{S}+\ldots\right)^{\log_{0.25}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)}$$

$$S = 1+\frac{2}{3}+\frac{6}{3^2}+\frac{10}{3^3}+\ldots.$$

$$\frac{S}{3} = \quad \frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{6}{3^3}+\ldots.$$

– – – –

$$\frac{2S}{3} = 1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots.$$

$$\frac{2S}{3} = \frac{4}{3}+\frac{4}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots.$$

$$S = \frac{3}{2}\left(\frac{4/3}{1-1/3}\right) = 3$$

Now $\ell = (3)^{\log_{0.25}\left(\frac{1/3}{1-1/3}\right)}$

$$\ell = 3^{\log_{((1/4))}\left(\frac{1}{2}\right)} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

$\Rightarrow \ell^2 = 3$

7. $2\log_3(2^x-5)=\log_3 2+\log_3\left(2^x-\frac{7}{2}\right)$

Let $2^x = t$

$\log_3(t-5)^2=\log_3 2\left(t-\frac{7}{2}\right)$

$(t-5)^2=2t-7$

$t^2-12t+32=0$

$(t-4)(t-8)=0$

$\Rightarrow 2^x=4$ or $2^x=8$

X = 2 (Rejected)

Or x = 3

8. $B-C\equiv\{7,13,19,...97,....\}$

Now, $n^2-n\le 100\times100$

$\Rightarrow n(n-1)\le 100\times 100$

$\Rightarrow A=\{1,2,....,100\}$.

So, $A\cap(B-C)=\{7,13,19,...,97\}$

Hence, sum $=\frac{16}{2}(7+97)=832$

9. $S=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+1}+\frac{2^2}{x^4+1}+....\frac{2^{100}}{x^{2^{100}}+1}$

$S+\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+1}+....$

$=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+...$

$S+\frac{1}{1-x}=\frac{2^{101}}{1-x^{2^{101}}}$

Put x = 2

$S=1-\frac{2^{101}}{2^{2^{101}}-1}$

Not in option (BONUS)

10. Sum of infinite terms :

$\frac{a}{1-r}=15$ .... (i)

Series formed by square of terms:

$a^2, a^2r^2, a^2r^4, a^2r^6$ .....

Sum $=\frac{a^2}{1-r^2}=150$

$\Rightarrow \frac{a}{1-r}.\frac{a}{1+r}=150 \Rightarrow 15.\frac{a}{1+r}=150$

$\Rightarrow \frac{a}{1+r}=10$ ...... (ii)

by (i) and (ii) a = 12 ; $r=\frac{1}{5}$

Now series : ar^2, ar^4, ar^6

Sum $=\frac{ar^2}{1-r^2}=\frac{12.\left(1/25\right)}{1-1/25}=\frac{1}{2}$

11. $c_2 = a_2 + b_2 = a_1 - 3 + 2b_1 = 12$

$a_1 + 2b_1 = 15$ ____(1)

$c_3 = a_3 + b_3 = a_1 - 6 + 4b_1 = 13$

$a_1 + 4b_1 = 19$ ____(2)

from (1) & (2) $b_1 = 2, a_1 = 11$

$\sum_{k=1}^{10}c_k=\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k$

$=\frac{10}{2}(2\times11+9\times(-3))+\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}$

= 5(22 – 27) + 2(1023)

= 2046 – 25 = 2021

12. $\frac{2(1+2+3+...+y)}{3(1+2+3+...+y)}=\frac{4}{\log_{10}x}$

$\Rightarrow \log_{10}x = 6 \Rightarrow x = 10^6$

Now,

$y=(\log_{10}x)+\left(\log_{10}x^{\frac{1}{3}}\right)+\left(\log_{10}x^{\frac{1}{9}}\right)+..\infty$

$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...\infty\right)\log_{10}x$

$=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)\log_{10}x=9$

So, $(x,y) = (10^6,9)$

13. $S=\frac{2^2-1^2}{1^2\times2^2}+\frac{3^2-2^2}{2^2\times3^2}+\frac{4^2-3^2}{3^2\times4^2}+...$

$=\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right]+\left[\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right]+\left[\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right]+...+\left[\frac{1}{10^2}-\frac{1}{11^2}\right]$

$=1-\frac{1}{121}$

$=\frac{120}{121}$

14. Let numbers be $\frac{a}{r}$, a, ar $\rightarrow$ G.P

$\frac{a}{r}$, 2a, ar $\rightarrow$ A.P $\Rightarrow 4a=\frac{a}{r}+ar \Rightarrow r+\frac{1}{r}=4$

$r=2\pm\sqrt{3}$

4^{th} form of G.P = $3r^2 \Rightarrow ar^2=3r^2 \Rightarrow a=3$

$r=2+\sqrt{3}$, a = 3, $d=2a-\frac{a}{r}=3\sqrt{3}$

$r^2-d=\left(2+\sqrt{3}\right)^2-3\sqrt{3}$

$=7+4\sqrt{3}-3\sqrt{3}$

$=7+\sqrt{3}$

15. $7\times8,\ 10\times10,\ 13\times12,\ 16\times14 \ldots\ldots$

$T_n=(3n+4)(2n+6)=2(3n+4)(n+3)$

$=2(3n^2+13n+12)=6n^2+26n+24$

$S_{10}=\sum_{n=1}^{10}T_n=6\sum_{n=1}^{10}n^2+26\sum_{n=1}^{10}n+24\sum_{n=1}^{10}1$

$=\frac{6(10\times11\times21)}{6}+26\times\frac{10\times11}{2}+24\times10$

$=10\times11(21+13)+240$

$=3980$

Mean $=\frac{S_{10}}{10}=\frac{3980}{10}=398$

16. $\frac{\frac{10}{2}(2a_1+9d)}{\frac{p}{2}(2a_1+(p-1)d)}=\frac{100}{p^2}$

$(2a_1+9d)p=10(2a_1+(p-1)d)$

$9dp=20a_1-2pa_1+10d(p-1)$

$9p=(20-2p)\frac{a_1}{d}+10(p-1)$

$\frac{a_1}{d}=\frac{(10-p)}{2(10-p)}=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \frac{a_{11}}{a_{10}}=\frac{a_1+10d}{a_1+9d}=\frac{\frac{1}{2}+10}{\frac{1}{2}+9}=\frac{21}{19}$

17. A = 4 – digit numbers divisible by 3

A = 1002, 1005, …, 9999.

9999 = 1002 + (n – 1)3

$\Rightarrow$ (n – 1)3 = 8997 $\Rightarrow$ n = 3000

B = 4 – digit numbers divisible by 7

B = 1001, 1008, …, 9996

$\Rightarrow$ 9996 = 1001 + (n – 1)7

$\Rightarrow$ n = 1286

$A\cap B$ = 1008, 1029, …, 9996

9996 = 1008 + (n – 1)21

$\Rightarrow$ n = 429

So, no divisible by either 3 or 7

= 3000 + 1286 – 429 = 3857

total 4-digits numbers = 9000

required numbers = 9000 – 3857 = 5143

18. $S=\frac{7}{5}+\frac{9}{5^2}+\frac{13}{5^3}+\frac{19}{5^4}+...$

$\frac{1}{5}S=\qquad\frac{7}{5^2}+\frac{9}{5^3}+\frac{13}{5^4}+...$

On subtracting

$\frac{4}{5}S=\frac{7}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\frac{6}{5^4}+...$

$S=\frac{7}{4}+\frac{1}{10}\left(1+\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+...\right)$

$S=\frac{7}{4}+\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$=\frac{7}{4}+\frac{1}{10}\times\frac{25}{16}=\frac{61}{32}$

$\Rightarrow 160S=5\times61=305$

19. Let $T_r = r(n-r)$

$T_r = nr - r^2$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{r=1}^{n} T_r = \sum_{r=1}^{n}\left(nr - r^2\right)$$

$$S_n = \frac{n.(n)(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_n = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

Now $\sum_{r=4}^{\infty}\left(\frac{2S_n}{n!} - \frac{1}{(n-2)!}\right)$

$$= \sum_{r=4}^{\infty}\left(2.\frac{n(n-1)(n+1)}{6.n(n-1)(n-2)!} - \frac{1}{(n-2)!}\right)$$

$$= \sum_{r=4}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{n-2+3}{(n-2)!}\right) - \frac{1}{(n-2)!}\right)$$

$$= \sum_{r=4}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n-3)!} = \frac{1}{3}(e-1)$$

Option (1)

20. $\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_n(a_n+d)}$

$$= \frac{1}{d}\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n+d}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{21}}\right) = \frac{4}{9} \text{ (Given)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d}\left(\frac{a_{21}-a_1}{a_1 a_{21}}\right) = \frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{d}\left(\frac{a_1+20d-a_1}{a_1 a_2}\right) = \frac{4}{9} \Rightarrow a_1 a_2 = 45 \text{ .... (1)}$$

Now sum of first 21 terms $= \frac{21}{2}(2a_1 + 20d) = 189$

$\Rightarrow a_1 + 10d = 9$ ... (2)

For equation (1) & (2) we get

$a_1 = 3$ & $d = \frac{3}{5}$

OR

$a_1 = 15$ & $d = -\frac{3}{5}$

So, $a_6.a_{16} = (a_1 + 5d)(a_1 + 15d)$

$\Rightarrow a_6 a_{16} = 72$

Option (2)

21. $\frac{a+2+a}{3} = \frac{10}{3}$

$a = 4$

and $\frac{c+b+b}{3} = \frac{7}{3}$

$c + 2b = 7$

also $2b = a + c$

$2b - a + 2b = 7$

$b = \frac{11}{4}$

now $4x^2 + \frac{11}{4}x + 1 = 0 \;\; \begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}$

$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 - 3\alpha\beta$

$$= \left(\frac{-11}{16}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{121}{256} - \frac{3}{4} = \frac{-71}{256}$$

22. Let number are a, ar, ar^2, ar^3

$$a\frac{(r^4-1)}{r-1} = \frac{65}{12} \quad \text{...(1)}$$

$$\frac{1}{a}\frac{\left(\frac{1}{r^4}-1\right)}{\frac{1}{r}-1} = \frac{65}{18}$$

$$\frac{1}{ar^3}\left(\frac{1-r^3}{1-r}\right) = \frac{65}{18} \quad \text{....(2)}$$

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow a^2r^3 = \frac{3}{2}$

and $a^3.r^3 = 1$

$ar = 1$

$(ar)^2.r = \frac{3}{2}$

$r = \frac{3}{2}$, $a = \frac{2}{3}$

So, third term = $ar^2 = \frac{2}{3}\times\frac{9}{4}$

$$\alpha = \frac{3}{2}$$

$2\alpha = 3$

23. $x = \frac{1}{1-\cos^2\theta} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{x}$

Also, $\cos^2\theta = \frac{1}{y}$ & $1-\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{z}$

So, $1-\frac{1}{x}\times\frac{1}{y}=\frac{1}{z} \Rightarrow z(xy-1)=xy$ ....(1)

Also, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \quad \Rightarrow x+y=xy$ .....(2)

From (i) and (ii)

xy + z = xyz = (x + y) z

24. Let a_n be the side length of A_n.

So, $a_n = \sqrt{2}a_{n+1}$, $a_1 = 12$

$\Rightarrow a_n = 12\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

Now, $\Rightarrow (a_n)^2 < 1 \qquad \Rightarrow \frac{144}{2^{(n-1)}} < 1$

$\Rightarrow 2^{(n-1)} > 144$

$\Rightarrow n - 1 \ge 8$

$\Rightarrow n \ge 9$

25. $T_n = \frac{n^2+6n+10}{(2n+1)!} = \frac{4n^2+24n+40}{4.(2n+1)!}$

$= \frac{(2n+1)^2+20n+39}{4.(2n+1)!}$

$= \frac{(2n+1)^2+(2n+1).10+29}{4(2n+1)!}$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{(2n+1)^2}{(2n+1)(2n)!}+\frac{(2n+1)10}{(2n+1)(2n)!}+\frac{29}{(2n+1)!}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{2n+1}{(2n)!}+\frac{10}{(2n)!}+\frac{29}{(2n+1)!}\right]$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2n-1)!}+\frac{11}{(2n)!}+\frac{29}{(2n+1)!}\right]$

$S_1 = \frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+... = \frac{e-\frac{1}{e}}{2}$

$S_2 = 11\left[\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+...\right] = 11\left[\frac{e+\frac{1}{e}-2}{2}\right]$

$S_3 = 29\left[\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+...\right] = 29\left[\frac{e-\frac{1}{e}-2}{2}\right]$

Now, $S = \frac{1}{4}[S_1+S_2+S_3]$

$= \frac{1}{4}\left[\frac{e}{2}-\frac{1}{2e}+\frac{11e}{2}+\frac{11}{2e}+\frac{29e}{2}-\frac{29}{2e}-4\right]$

$= \frac{41e}{8}-\frac{19}{8e}-10$

26. $4x^2 - 9x + 5 = 0 \Rightarrow x = 1, \frac{5}{4}$

Now given $\frac{5}{4} = \frac{t_p+t_q}{2}, t = t_p t_q$ where

$t_r = -16\left(-\frac{1}{2}\right)^{r-1}$

so $\frac{5}{4} = -8\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{p-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{q-1}\right]$

$1 = 256\left(-\frac{1}{2}\right)^{p+q-2} \Rightarrow 2^{p+q-2} = (-1)^{p+q-2}2^8$

hence p + q = 10

27. a, ar, ar^2, ...

$T_2+T_6 = \frac{25}{2} \Rightarrow ar(1+r^4) = \frac{25}{2}$

$a^2r^2(1+r^4)^2 = \frac{625}{4}$ .... (1)

$T_3 . T_5 = 25 \Rightarrow (ar^2)(ar^4) = 25$

$a^2r^6 = 25$ .... (2)

On dividing (1) by (2)

$\frac{(1+r^4)^2}{r^4} = \frac{25}{4}$

$4r^8 - 17r^4 + 4 = 0$

$(4r^4 - 1)(r^4 - 4) = 0$

$r^4 = \frac{1}{4}, 4 \Rightarrow r^4 = 4$

(an increasing geometric series)

$a^2r^6 = 25 \Rightarrow (ar^3)^2 = 25$

$T_4 + T_6 + T_8 = ar^3 + ar^5 + ar^7$

$= ar^3 (1 + r^2 + r^4)$

$= 5(1 + 2 + 4) = 35$

28. $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{7}{3^2} + \frac{12}{3^3} + \frac{17}{3^4} + ...$

$\frac{S}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \frac{12}{3^4} + ...$

$\frac{2S}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \frac{5}{3^4} + ... +$ up to infinite terms

$\Rightarrow S = \frac{13}{4}$

29. $a^2 = \frac{b}{16} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{16a^2}$

$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + 6$

$\frac{1}{8a^2} = \frac{1}{a} + 6$

$\frac{1}{a^2} - \frac{8}{a} - 48 = 0$

$\frac{1}{a} = 12, -4 \Rightarrow a = \frac{1}{12}, -\frac{1}{4}$

$a = \frac{1}{12}, \ a > 0$

$b = 16a^2 = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow 72(a + b) = 6 + 8 = 14$

30. $S_n(x) = (2+3+6+11+18+27+.......+\text{n-terms})\log_a x$

Let $S_1 = 2 + 3 + 6 + 11 + 18 + 27 + ... + T_n$

$S_1 = 2 + 3 + 6 + ... + T_n$

$T_n = 2 + 1 + 3 + 5 + ... + \text{n terms}$

$T_n = 2 + (n - 1)^2$

$S_1 = \Sigma T_n = 2n + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$\Rightarrow S_n(x) = \left(2n + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right)\log_a x$

$S_{24}(x) = 1093$ (Given)

$\log_a x \left(48 + \frac{23.24.47}{6}\right) = 1093$

$\log_a x = \frac{1}{4}$ .... (1)

$S_{12}(2x) = 265$

$S_{12}(2x) = 265$

$\log_a(2x)\left(24 + \frac{11.12.23}{6}\right) = 265$

$\log_a 2x = \frac{1}{2}$ .... (2)

(2) – (1)

$\log_a 2x - \log_a x = \frac{1}{4}$

$\log_a 2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 16$

31. **GP :** 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192

AP : 11, 16, 21, 26, 31, 36

Common terms : 16, 256, 4096 only

32. $2\log_{10}(4^x - 2) = 1 + \log_{10}\left(4^x + \frac{18}{5}\right)$

$(4^x - 2)^2 = 10\left(4^x + \frac{18}{5}\right)$

$(4^x)^2 + 4 - 4(4^x) - 32 = 0$

$(4^x - 16)(4^x + 2) = 0$

$4^x = 16$

$x = 2$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3(-2) - 1(0-4) + 4(1)$$

$= -6 + 4 + 4 = 2$

33. $S = (100)(100) + (99)(101) + (98)(102)........(2)(198) + (1)(199)$

$$S = \sum_{x=0}^{99}(100-x)(100+x) = \sum 100^2 - x^2$$

$$= 100^3 - \frac{99\times100\times199}{6}$$

$\alpha = 3$ $\beta = 1650$

$$\text{slope} = \frac{1650}{3} = 550$$

34. $T_n = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}\frac{1}{(2n+2)2n} = \frac{1}{4(n)(n+1)}$

$$= \frac{(n+1)-n}{4n(n+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$S = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{100}{101}\right) = \frac{25}{101}$$

35. $S_{2n} = \frac{2n}{2}[2a + (2n-1)d],\ S_{4n} = \frac{4n}{2}[2a + (4n-1)d]$

$$\Rightarrow S_2 - S_1 = \frac{4n}{2}[2a + (4n-1)d] - \frac{2n}{2}[2a + (2n-1)d]$$

$= 4an + (4n - 1)2nd - 2na - (2n - 1)dn$

$= 2na + nd[8n - 2 - 2n + 1]$

$\Rightarrow 2na + nd[6n - 1] = 1000$

$$2a + (6n-1)d = \frac{1000}{n}$$

$$\text{Now, } S_{6n} = \frac{6n}{2}\left[2a + (6n-1)d\right]$$

$$= 3n.\frac{1000}{n} = 3000$$

36. $\left((x^{1/3}+1) - \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\right)\right)^{10}$

$(x^{1/3} - x^{-1/2})^{10}$

$T_{r+1} = {}^{10}C_r(x^{1/3})^{10-r}(-x^{-1/2})^r$

$$\frac{10-r}{3} - \frac{r}{2} = 0 \Rightarrow 20 - 2r - 3r = 0$$

$\Rightarrow r = 4$

$$T_5 = {}^{10}C_4 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 210$$