RELATION

1. माना **N** प्राकतिक संख्याओं का समुच्चय है और **N** पर एक संबंध R निम्न द्वारा परिभाषित है :
$R = \{(x,y) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : x^3 - 3x^2y - xy^2 + 3y^3 = 0\}$ ।
तो संबंध R :
(1) सममित है, परन्तु न तो स्वतुल्य है और न ही संक्रामक है
(2) स्वतुल्य है, परन्तु न तो सममित है और न ही संक्रामक है
(3) स्वतुल्य और सममित है, परन्तु संक्रामक नहीं है
(4) एक तुल्यता संबंध है

2. निम्न में से कौन सा वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर संबंध R के लिए सही **नही** है ?
(1) $(x, y) \in R \Leftrightarrow 0 < |x| - |y| \le 1$ न तो संक्रामक है न ही सममित है
(2) $(x, y) \in R \Leftrightarrow 0 < |x - y| \le 1$ सममित तथा संक्रामक है।
(3) $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x| - |y| \le 1$ स्वतुल्य है किन्तु सममित नहीं है।
(4) $(x, y) \in R \Leftrightarrow |x - y| \le 1$ स्वतुल्य तथा सममित है

3. माना $A = \{2, 3, 4, 5, \ldots, 30\}$ है तथा $A \times A$ पर, $(a, b) \simeq (c, d)$, यदि और केवल यदि $ad = bc$ है, द्वारा परिभाषित एक तुल्यता संबंध '$\simeq$' है। तो क्रमित युग्मों की संख्या, जो क्रमित युग्म (4, 3) के साथ इस तुल्यता संबंध को सन्तुष्ट करते हैं, है :
(1) 5 (2) 6 (3) 8 (4) 7

4. $n \times n$ के वास्तविक आव्यूहों A तथा B के एक समूह पर एक संबंध R निम्न प्रकार से परिभाषित है :
"ARB यदि और केवल यदि एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह P का अस्तित्व है। जिसके लिए $PAP^{-1} = B$ है'' । तो निम्न में से कौन–सा सत्य है ?
(1) R सममित और संक्रामक है परन्तु स्वतुल्य नहीं है
(2) R स्वतुल्य और सममित है परन्तु संक्रामक नहीं है
(3) R एक तुल्यता संबंध है
(4) R स्वतुल्य और संक्रामक है परन्तु सममित नहीं है

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $x^3 - 3x^2y - xy^2 + 3y^3 = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - y^2) - 3y(x^2 - y^2) = 0$

$\Rightarrow (x - 3y)(x - y)(x + y) = 0$

Now, $x = y\ \forall (x,y) \in N \times N$ so reflexive

But not symmetric & transitive

See, (3,1) satisfies but (1,3) does not. Also (3,1) & (1,–1) satisfies but (3, –1) does not

2. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Note that (1,2) and (2,3) satisfy $0 < |x - y| \le 1$ but (1,3) does not satisfy it so $0 \le |x - y| \le 1$ is symmetric but not transitive

So, (2) is correct.

3. Official Ans by NTA (4)

Sol. $A = \{2, 3, 4, 5, \ldots, 30\}$

$(a, b) \simeq (c, d) \Rightarrow ad = bc$

$(4, 3) \simeq (c, d) \Rightarrow 4d = 3c$

$\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{c}{d}$

$\frac{c}{d} = \frac{4}{3}$ & $c, d \in \{2, 3, \ldots, 30\}$

$(c, d) = \{(4, 3), (8, 6), (12, 9), (16, 12), (20, 15), (24, 18), (28, 21)\}$

No. of ordered pair = 7

4. Official Ans. by NTA (3)

Sol. A and B are matrices of $n \times n$ order & ARB iff there exists a non singular matrix $P(\det(P) \ne 0)$ such that $PAP^{-1} = B$

For reflexive

$ARA \Rightarrow PAP^{-1} = A$ ...(1) must be true

for P = I, Eq.(1) is true so 'R' is reflexive

For symmetric

$ARB \Leftrightarrow PAP^{-1} = B$ ...(1) is true

for BRA iff $PBP^{-1} = A$ ...(2) must be true

$\because PAP^{-1} = B$

$P^{-1}PAP^{-1} = P^{-1}B$

$IAP^{-1}P = P^{-1}BP$

$A = P^{-1}BP$ ...(3)

from (2) & (3) $PBP^{-1} = P^{-1}BP$

can be true some $P = P^{-1} \Rightarrow P^2 = I\ (\det(P) \ne 0)$

So 'R' is symmetric

For trnasitive

$ARB \Leftrightarrow PAP^{-1} = B$... is true

$BRC \Leftrightarrow PBP^{-1} = C$... is true

now $PPAP^{-1}P^{-1} = C$

$P^2A(P^2)^{-1} = C \Rightarrow ARC$

So 'R' is transitive relation

$\Rightarrow$ Hence R is equivalence