PARABOLA

1. माना परवलय $S : y^2 = 2x$ के बिंदु P(2, 2) पर स्पर्श रेखा x-अक्ष को बिंदु Q पर मिलती है तथा इस बिंदु पर अभिलम्ब परवलय S को बिन्दु R पर मिलता है तो त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल (वर्ग इकाईयों में) बराबर है:

(1) $\frac{25}{2}$ (2) $\frac{35}{2}$ (3) $\frac{15}{2}$ (4) 25

2. माना $y = mx + c$, $m > 0$, परवलय $y^2 = -64x$ की नाभीय जीवा है तथा वत्त $(x + 10)^2 + y^2 = 4$ की स्पर्श रेखा है तो $4\sqrt{2}(m + c)$ का मान बराबर है _____।

3. माना परवलय, $y = 4x^2 + 1$ पर एक चर बिन्दु P है। तो P से रेखा, $y = x$ पर डाले गए लम्ब के पाद तथा P के मध्य बिन्दु का बिन्दु पथ है:

(1) $(3x - y)^2 + (x - 3y) + 2 = 0$
(2) $2(3x - y)^2 + (x - 3y) + 2 = 0$
(3) $(3x - y)^2 + 2(x - 3y) + 2 = 0$
(4) $2(x - 3y)^2 + (3x - y) + 2 = 0$

4. यदि वक्र $y^2 = 6x$ पर, बिन्दु $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ के निकटतम बिन्दु (α, β) है, तो $2(\alpha + \beta)$ बराबर है _____।

5. माना P एक परवलय है जिसका शीर्ष तथा नाभि धनात्मक x–अक्ष पर है और उनकी मूलबिन्दु से दूरी क्रमशः 2 तथा 4 इकाई है। यदि O(0, 0) से परवलय P पर दो स्पर्श रेखाएँ खींची जाती है जो P को S तथा R पर मिलती हैं, तो ΔSOR का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) बराबर है :

(1) $16\sqrt{2}$ (2) 16 (3) 32 (4) $8\sqrt{2}$

6. यदि वत्त $4x^2 + 4y^2 + 120x + 675 = 0$ की एक जीवा के अनुदिश एक रेखा बिदुं (–30, 0) से होकर जाती है तथा परवलय $y^2 = 30x$ की स्पर्श रेखा है, तो इस जीवा की लंबाई है :

(1) 5 (2) 7 (3) $5\sqrt{3}$ (4) $3\sqrt{5}$

7. अतिपरवलय $x^2 - y^2 = 4$ की उन जीवाओं, जो परवलय $y^2 = 8x$ को स्पर्श करती है, के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ है।

(1) $y^3(x - 2) = x^2$ (2) $x^3(x - 2) = y^2$
(3) $y^2(x - 2) = x^3$ (4) $x^2(x - 2) = y^3$

8. परवलय $y^2 = 8x$ के बिंदु P(2, –4) पर एक स्पर्श रेखा तथा एक अभिलंब खींचे गए हैं, जो परवलय की नियता को क्रमशः बिन्दुओं A तथा B पर मिलते हैं। यदि Q(a, b) एक ऐसा बिंदु है, जिसके लिए AQBP एक वर्ग है, तो $2a + b$ बराबर है :

(1) –16 (2) –18 (3) –12 (4) –20

9. यदि एक बिन्दु P से परवलय $y^2 = 16(x - 3)$ पर खींची गई दो स्पर्श रेखाऐं समकोण बनाती हैं, तो बिन्दु P का बिन्दुपथ है :

(1) $x + 3 = 0$ (2) $x + 1 = 0$
(3) $x + 2 = 0$ (4) $x + 4 = 0$

10. एक परवलय, जिसके शीर्ष तथा नाभि धनात्मक x–अक्ष पर मूल बिन्दु से क्रमशः R तथा S (>R) की दूरी पर हैं, की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई है :

(1) 4(S + R) (2) 2(S – R)
(3) 4(S – R) (4) 2(S + R)

11. परवलय $y^2 = 8x$ के बिंदु (2, –4) पर एक स्पर्श रेखा L खींची गई है। यदि रेखा L वत्त $x^2 + y^2 = a$ की भी स्पर्श रेखा है, तो 'a' बराबर है_____।

12. माना एक परवलय का शीर्ष $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ तथा नियता $y = \frac{1}{2}$ हैं। माना P एक बिन्दु है जहाँ परवलय, रेखा $x = -\frac{1}{2}$ से मिलता है। यदि P बिन्दु पर परवलय का अभिलम्ब परवलय को फिर से Q बिन्दु पर काटता है, तब $(PQ)^2$ बराबर है :

(1) $\frac{75}{8}$ (2) $\frac{125}{16}$ (3) $\frac{25}{2}$ (4) $\frac{15}{2}$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE (MAIN)\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Parabola

13. यदि P परवलय, $y = x^2 + 4$ पर एक ऐसा बिन्दु है, जो सरल रेखा $y = 4x - 1$ के निकटतम है, तो P के निर्देशांक हैं :

(1) (3, 13) (2) (1, 5) (3) (–2, 8) (4) (2, 8)

14. परवलय, $y^2 = 4ax$ की नाभि तथा परवलय पर किसी भी बिन्दु को मिलाने वाले रेखाखंडों के मध्य बिन्दुओं का बिन्दु–पथ एक और परवलय है जिसकी नियता है:

(1) $x = -\frac{a}{2}$ (2) $x = \frac{a}{2}$

(3) $x = 0$ (4) $x = a$

15. परवलय $y^2 = 6x$ पर एक स्पर्श रेखा खींची गई है जो रेखा $2x + y = 1$ के लंबवत है। तो निम्न में से कौन सा बिंदु इस पर स्थित नहीं है?

(1) (–6, 0) (2) (4, 5) (3) (5, 4) (4) (0, 3)

16. रेखा $x - y = 1$ तथा वक्र $x^2 = 2y$ के बीच की न्यूनतम दूरी है :

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) 0

17. वत्त $(x - 3)^2 + y^2 = 9$ तथा परवलय $y^2 = 4x$ की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है। यदि दो संपर्क बिन्दु (a, b) तथा (c, d) भिन्न हैं तथा प्रथम चतुर्थांश में हैं, तो $2(a + c)$ बराबर है _____.

18. माना पलवलय $y^2 = 4x$ पर एक बिंदु का रेखा $y = x$ के सापेक्ष दर्पण प्रतिबिम्ब का बिंदुपथ C है। तो P(2,1) पर C की स्पर्श रेखा का समीकरण है :

(1) $x - y = 1$ (2) $2x + y = 5$

(3) $x + 3y = 5$ (4) $x + 2y = 4$

19. यदि परवलय $y^2 = 2x$ पर डाले गये तीन अभिलम्ब, बिंदु (a, 0), $a \neq 0$, से होकर जाते हैं, तो 'a' निम्न में से किस से अधिक होना चाहिए ?

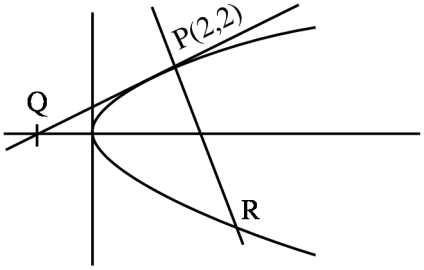
(1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) –1 (4) 1

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Parabola

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



Tangent at P : $y(2) = 2\,(1/2)\,(x + 2)$

$\Rightarrow 2y = x + 2$

$\therefore\ Q = (-2, 0)$

Normal at P : $y - 2 = -\dfrac{(2)}{2.\frac{1}{2}}(x - 2)$

$\Rightarrow y - 2 = -2(x - 2)$

$\Rightarrow y = 6 - 2x$

$\therefore$ Solving with $y^2 = 2x \Rightarrow R\left(\dfrac{9}{2} - 3\right)$

$$\therefore \text{ Ar } (\Delta PQR) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ \frac{9}{2} & 3- & 1 \end{vmatrix}$$

$= \dfrac{25}{2}$ sq.units

2. Official Ans. by NTA (34)

Sol. $y^2 = -64x$

focus : $(-16, 0)$

$y = mx + c$ is focal chord

$\Rightarrow c = 16m$ .....(1)

$y = mx + c$ is tangent to $(x + 10)^2 + y^2 = 4$

$$\Rightarrow y = m(x+10) \pm 2\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow c = 10m \pm 2\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow 16m = 10m \pm 2\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow 6m = 2\sqrt{1+m^2} \qquad (m > 0)$$

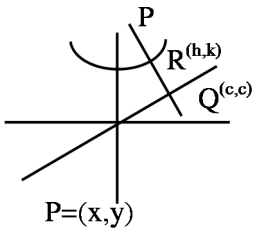
$\Rightarrow 9m^2 = 1 + m^2$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ \&\ c = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

$$4\sqrt{2}(m + c) = 4\sqrt{2}\left(\frac{17}{2\sqrt{2}}\right) = \boxed{34}$$

3. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



$$\frac{K - C}{h - C} = -1$$

$$C = \frac{h + K}{2} \quad P(x,y)$$

$$R = \left(\frac{x + C}{2}, \frac{y + C}{2}\right)$$

$$R = \left(\frac{x}{2} + \frac{h}{4} + \frac{K}{4}, \frac{y}{2} + \frac{h}{4} + \frac{k}{4}\right)$$

$$h = \frac{x}{2} + \frac{h}{4} + \frac{K}{4}$$

$$K = \frac{y}{2} + \frac{h}{4} + \frac{K}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3h}{2} - \frac{K}{2}, y = \frac{3K}{2} - \frac{h}{2}$$

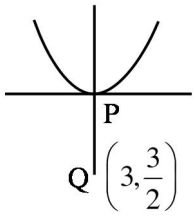
$Y = 4x^2 + 1$

$$\left(\frac{3k - h}{2}\right) = 4\left(\frac{3h - k}{2}\right)^2 + 1$$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Parabola

4. Official Ans. by NTA (9)

Sol.



$P \equiv \left(\frac{3}{2}t^2, 3t\right)$

Normal at point P

$tx + y = 3t + \frac{3}{2}t^3$

Passes through $\left(3,\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow 3t + \frac{3}{2} = 3t + \frac{3}{2}t^3$

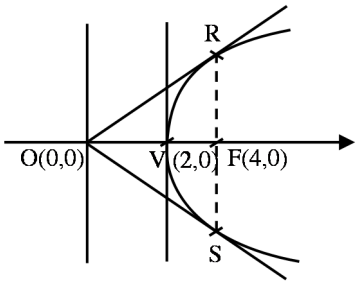
$P \equiv \left(\frac{3}{2}, 3\right) = (\alpha, \beta)$

$\Rightarrow t^3 = 1 \Rightarrow t = 1$

$2(\alpha + \beta) = 2\left(\frac{3}{2} + 3\right) = 9$

5. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



Clearly RS is latus-rectum

$\because$ VF = 2 = a

$\therefore$ RS = 4a = 8

Now OF = 2a = 4

$\Rightarrow$ Area of triangle ORS = 16

6. Official Ans. by NTA (4)

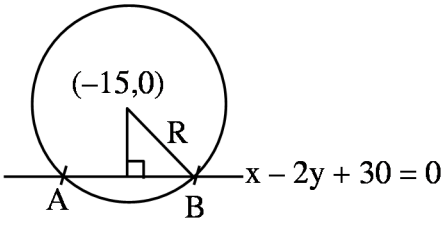
Sol. Equation of tangent to $y^2 = 30x$

$y = mx + \frac{30}{4m}$

Pass thru (–30, 0) : $a = -30m + \frac{30}{4m} \Rightarrow m^2 = 1/4$

$\Rightarrow m = \frac{1}{2}$ or $m = -\frac{1}{2}$

At $m = \frac{1}{2}$: $y = \frac{x}{2} + 15 \Rightarrow x - 2y + 30 = 0$



$P = \frac{15}{\sqrt{5}}$

$\ell_{AB} = 2\sqrt{R^2 - P^2} = 2\sqrt{\frac{225}{4} - \frac{225}{5}}$

$\Rightarrow \ell_{AB} = 30.\sqrt{\frac{1}{20}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$

7. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $T = S_1$

$xh - yk = h^2 - k^2$

$y = \frac{xh}{k} - \frac{\left(h^2 - k^2\right)}{k}$

this touches $y^2 = 8x$ then $c = \frac{a}{m}$

$\left(\frac{k^2 - h^2}{k}\right) = \frac{2k}{h}$

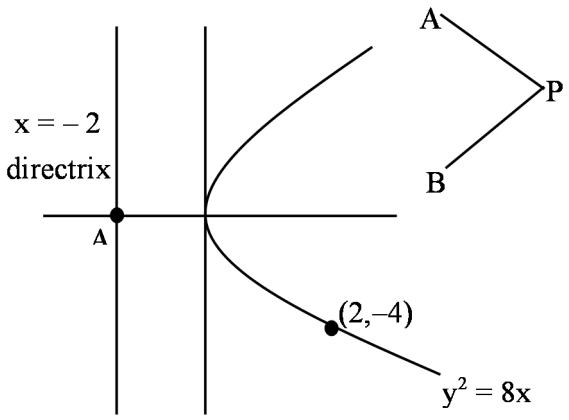
$2y^2 = x(y^2 - x^2)$

$y^2(x - 2) = x^3$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Parabola

8. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



Equation of tangent at (2,–4) (T = 0)

$-4y = 4(x + 2)$

$x + y + 2 = 0$ …(1)

equation of normal

$x - y + \lambda = 0$

$\downarrow(2,-4)$

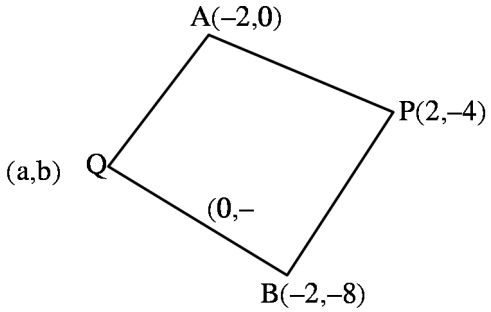
$\lambda = -6$

thus $x - y = 6$ …(2) equation of normal

POI of (1) & $x = -2$ is A(–2,0)

POI of (2) & $x = -2$ is A(–2,8)

Given AQBP is a sq.



$\Rightarrow m_{AQ}.m_{AP} = -1$

$\Rightarrow \left(\frac{b}{a+2}\right)\left(\frac{4}{-4}\right) = -1 \Rightarrow a + 2 = b$ …(1)

Also PQ must be parallel to x-axis thus

$\Rightarrow b = -4$

$\therefore a = -6$

Thus $2a + b = -16$

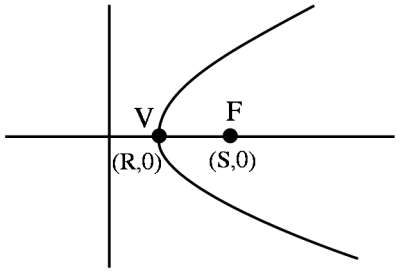
9. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Locus is directrix of parabola

$x - 3 + 4 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0.$

10. Official Ans. by NTA (3)

Sol.



$V \rightarrow$ Vertex

$F \rightarrow$ focus

$VF = S - R$

So latus rectum $= 4(S - R)$

11. Official Ans. by NTA (2)

Sol. tangent of $y^2 = 8x$ is $y = mx + \frac{2}{m}$

$P(2, -4) \Rightarrow -4 = 2m + \frac{2}{m}$

$\Rightarrow m + \frac{1}{m} = -2 \Rightarrow m = -1$

$\therefore$ tangent is $y = -x - 2$

$\Rightarrow x + y + 2 = 0$ …(1)

(1) is also tangent to $x^2 + y^2 = a$

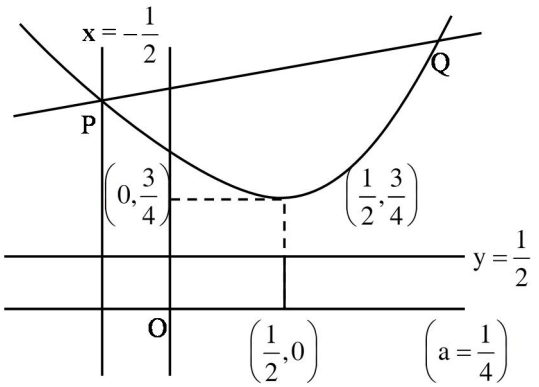
So $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 2$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Parabola

12. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



$\left(y-\frac{3}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ ... (1)

For $x=-\frac{1}{2}$

$y-\frac{3}{4}=1 \Rightarrow y=\frac{7}{4} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$

Now $y'=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$ At $x=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow m_T=-2,\ m_N=\frac{1}{2}$

Equation of Normal is

$y-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$y=\frac{x}{2}+2$

Now put y in equation (1)

$\frac{x}{2}+2-\frac{3}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow x=2\ \&\ -\frac{1}{2}$

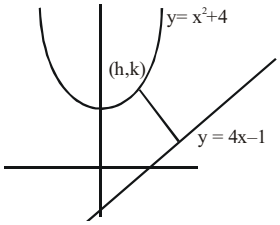
$\Rightarrow Q(2,3)$

Now $(PQ)^2=\frac{125}{16}$

Option (2)

13. Official Ans. by NTA (4)

Sol. Ans. (4)



P : $y=x^2+4$

$k=h^2+4$

L : $y=4x-1$

$y-4x+1=0$

$d=AB=\left|\frac{k-4h+1}{\sqrt{5}}\right|=\left|\frac{h^2-4-4h+1}{\sqrt{5}}\right|$

$\frac{d(d)}{dh}=\frac{2h-4}{\sqrt{5}}=0$

$h=2$

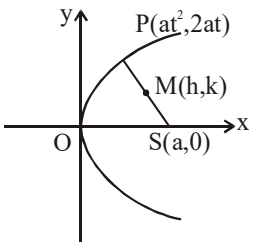
$\frac{d^2(d)}{dh^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}>0$

$\therefore\ k=4+4=8$

$\therefore$ Point (2, 8)

14. Official Ans. by NTA (3)

Sol.



$h=\frac{at^2+a}{2},\ k=\frac{2at+0}{2}$

$\Rightarrow\ t^2=\frac{2h-a}{a}$ and $t=\frac{k}{a}$

$\Rightarrow\ \frac{k^2}{a^2}=\frac{2h-a}{a}$

$\Rightarrow$ Locus of (h, k) is $y^2=a(2x-a)$

$\Rightarrow\ y^2=2a\left(x-\frac{a}{2}\right)$

Its directrix is $x-\frac{a}{2}=-\frac{a}{2}\ \Rightarrow\ x=0$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Parabola

15. Official Ans. by NTA (3)

Sol. Slope of tangent = $m_T = m$

So, $m(-2) = -1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

Equation : $y = mx + \frac{a}{m}$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2\times\frac{1}{2}}\left(a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\right)$

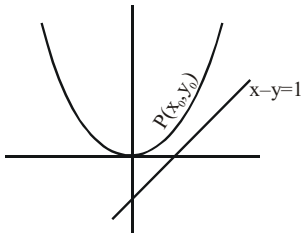
$\Rightarrow y = \frac{x}{2} + 3$

$\Rightarrow 2y = x + 6$

Point (5, 4) will not lie on it

16. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



Shortest distance between curves is always along common normal.

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_P = \text{slope of line} = 1$

$\Rightarrow x_0 = 1 \quad \therefore y_0 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow P\left(1, \frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ Shortest distance $= \left|\frac{1-\frac{1}{2}-1}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

option (2)

17. Official Ans. by NTA (9)

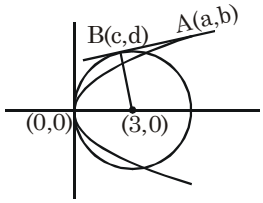
Sol. Let coordinate of point $A(t^2, 2t)$ $(\because a = 1)$

equation of tangent at point A

$yt = x + t^2$

$x - ty + t^2 = 0$

centre of circle (3, 0)



Now PD = radius

$\left|\frac{3-0+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\right| = 3$

$(3 + t^2)^2 = 9(1 + t^2)$

$9 + t^4 + 6t^2 = 9 + 9t^2$

$t = 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

So point $A\left(3, 2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow a = 3,\ b = 2\sqrt{3}$

(Since it lies in first quadrant)

For point B which is foot of perpendicular from centre (3, 0) to the tangent $x - \sqrt{3}y + 3 = 0$

$\frac{c-3}{1} = \frac{d-0}{-\sqrt{3}} = \frac{-(3-0+3)}{4}$

$\Rightarrow c = \frac{3}{2} \qquad d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow 2\left(\frac{3}{2} + 3\right) = 9$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Parabola

18. Official Ans by NTA (1)

Sol. Given $y^2 = 4x$

Mirror image on $y = x \Rightarrow C : x^2 = 4y$

$$2x = 4 \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{P(2,1)} = \frac{2}{2} = 1$$

Equation of tangent at (2, 1)

$\Rightarrow y - 1 = 1(x - 2)$

$\Rightarrow x - y = 1$

19. Official Ans. by NTA (4)

Sol. For standard parabola

For more than 3 normals (on axis)

$x > \frac{L}{2}$ (where L is length of L.R.)

For $y^2 = 2x$

L.R. = 2

for (a, 0)

$$a > \frac{L.R.}{2} \Rightarrow a > 1$$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Parabola