MATRICES

1. माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbf{R}$ को P + Q के रूप में लिखा गया है, जहाँ P एक सममित आव्यूह है तथा Q एक विषम सममित आव्यूह है। यदि det(Q) = 9 है, तो det (P) के सभी संभव मानों के योगफल का मापांक बराबर है :

(1) 36 (2) 24 (3) 45 (4) 18

2. माना $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ तथा $B = 7A^{20} - 20A^7 + 2I$ हैं, जहाँ I, 3 × 3 कोटि का तत्समक आव्यूह है। यदि $B = [b_{ij}]$, तो b_{13} बराबर है ________ ।

3. माना y = y(x), समीकरण $\frac{dy}{dx} - |A| = 0$, $\forall\ x > 0$, को संतुष्ट करता है, जबकि $A = \begin{bmatrix} y & \sin x & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & \frac{1}{x} \end{bmatrix}$ है।

यदि $y(\pi) = \pi + 2$ है, तो $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ बराबर है :

(1) $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}$ (2) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}$

(3) $\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{\pi}$ (4) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}$

4. माना $A = \{a_{ij}\}$ एक 3×3 आव्यूह है, जबकि

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-i} & \text{if } i < j, \\ 2 & \text{if } i = j, \\ (-1)^{i+j} & \text{if } i > j, \end{cases}$$

तो $\det(3\text{Adj}(2A^{-1}))$ बराबर है ______ ।

5. माना $A = [a_{ij}]$, कोटि 3 × 3 का एक वास्तविक आव्यूह इस प्रकार है कि प्रत्येक i = 1, 2, 3 के लिए $a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} = 1$ है। तो आव्यूह A^3 की सभी प्रविष्टियों का योग बराबर है –

(1) 2 (2) 1 (3) 3 (4) 9

6. माना $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ एक 3 × 3 आव्यूह है। तो 3 × 3 आव्यूहों B, जिनकी प्रविष्टियाँ, समुच्चय, {1, 2, 3, 4, 5} से हैं तथा जो AB = BA को संतुष्ट करते हैं, की संख्या है _______ ।

7. माना $M = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}\right\}$ है।

$f : M \to \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z} \equiv$ सभी पूर्णांको का समूह) ; $f(A) = \det(A)$, सभी $A \in M$, द्वारा परिभाषित है। तो उन $A \in M$ की संख्या जिनके लिए $f(A) = 15$ है, है ________ ।

8. यदि $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो P^{50} है :

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 25 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 50 & 1 \end{bmatrix}$

9. माना $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ है। यदि $A^{-1} = \alpha I + \beta A, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, हैं तथा I एक 2×2 का तत्समक आव्यूह है, तो $4(\alpha - \beta)$ बराबर है :

(1) 5 (2) $\frac{8}{3}$ (3) 2 (4) 4

10. माना A तथा B, कोटि 3×3 के वास्तविक आव्यूह हैं जिनके लिए $(A^2 - B^2)$ एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है। यदि $A^5 = B^5$ तथा $A^3B^2 = A^2B^3$ हैं, तो आव्यूह $A^3 + B^3$ के सारणिक का मान बराबर है :

(1) 2 (2) 4 (3) 1 (4) 0

11. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $M = A + A^2 + A^3 + ... + A^{20}$, हैं, तो आव्यूह M के सभी अवयवों का योगफल बराबर है______ ।

12. यदि $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{-2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ i & 1\end{pmatrix}$, $i=\sqrt{-1}$, तथा

$Q = A^TBA$ है, तो आव्यूह $A\,Q^{2021}\,A^T$ का व्युत्क्रम बराबर है :

(1) $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & -2021\\ 2021 & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2021i & 1\end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2021i & 1\end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix}1 & -2021i\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

13. माना $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ है। तो $A^{2025}-A^{2020}$ बराबर है –

(1) $A^6 - A$ (2) A^5

(3) $A^5 - A$ (4) A^6

14. माना A एक 3×3 वास्तविक आव्यूह है। यदि $\det(2\mathrm{Adj}(2\ \mathrm{Adj}(\mathrm{Adj}(2A)))) = 2^{41}$ है, तो $\det(A^2)$ का मान बराबर है ______.

15. यदि आव्यूह $A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ K & -1\end{pmatrix}$, समीकरण $A(A^3+3I)=2I$ को संतुष्ट करता है, तो K का मान है:

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$ (3) –1 (4) 1

16. समुच्चय

$\left\{A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}: a,b,d\in\{-1,0,1\} \text{ तथा } (I-A)^3 = I-A^3\right\}$,

I, 2×2 का तत्समक आव्यूह है में अवयवों की संख्या है ____ ।

17. माना सभी $n, m \in N$, $n > m$ के लिए $J_{n,m}=\int_0^{\frac12}\frac{x^n}{x^m-1}dx$ है, एक आव्यूह $A = [a_{ij}]_{3\times3}$, जहाँ $a_{ij}=\begin{cases}J_{6+i,3}-J_{i+3,3}, & i\le j\\ 0, & i>j\end{cases}$ है, का विचार कीजिए। तब $|\mathrm{adj}A^{-1}|$ बराबर है :

(1) $(15)^2 \times 2^{42}$ (2) $(15)^2 \times 2^{34}$

(3) $(105)^2 \times 2^{38}$ (4) $(105)^2 \times 2^{36}$

18. माना A तथा B दो 3×3 वास्तविक आव्यूह है जबकि A सममित आव्यूह है तथा B विषम सममित आव्यूह है। तो रैखिक समीकरण निकाय, $(A^2B^2 - B^2A^2)X = O$, जबकि X, एक 3×1 अज्ञात चरों का स्तम्भ आव्यूह है तथा O, एक 3×1 शून्य आव्यूह है :

(1) का कोई भी हल नहीं है

(2) के ठीक दो हल हैं

(3) के अनन्त हल हैं

(4) का केवल एक हल है

19. माना M कोई 3×3 आव्यूह है जिसके अवयव समुच्चय {0, 1, 2} से लिये गए हैं। इस तरह के आव्यूहों की अधिकतम संख्या, जिनके लिए M^TM के विकर्ण के अवयवों का योग 7 है, है _______ ।

20. माना $P=\begin{bmatrix}3 & -1 & -2\\ 2 & 0 & \alpha\\ 3 & -5 & 0\end{bmatrix}$ है, जबकि $\alpha \in R$ है। माना $Q = [q_{ij}]$ एक आव्यूह है, जिसके लिए $PQ = kI_3$, किसी शून्येतर, $k \in R$ के लिए, है। यदि $q_{23}=-\frac{k}{8}$ तथा $|Q|=\frac{k^2}{2}$ हैं, तो $\alpha^2 + k^2$ बराबर है _______ ।

21. माना A एक 3×3 आव्यूह है तथा $\det(A) = 4$ है। माना R_i, आव्यूह A की $i^{\text{वीं}}$ पंक्ति को दर्शाता है। यदि 2A पर संक्रिया $R_2 \to 2R_2 + 5R_3$ के प्रयोग से आव्यूह B प्राप्त होता है, तो det(B) बराबर है :

(1) 16 (2) 80 (3) 128 (4) 64

22. यदि आव्यूह, $A=\begin{bmatrix}1 & -\alpha\\ \alpha & \beta\end{bmatrix}$ के लिए $AA^T = I_2$, है, तो $\alpha^4 + \beta^4$ का मान है :

(1) 4 (2) 2 (3) 3 (4) 1

23. माना $A=\begin{bmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{bmatrix}$ है, जहाँ x, y तथा z वास्तविक संख्याएँ हैं, जिनके लिए $x+y+z>0$ तथा $xyz=2$ है। यदि $A^2=I_3$ है, तो $x^3+y^3+z^3$ का मान है_____ ।

24. यदि $A=\begin{bmatrix} 0 & -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}$ तथा $(I_2+A)(I_2-A)^{-1}=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, हैं, तो 13 (a^2+b^2) बराबर है________ ।

25. यदि किसी वास्तविक संख्याओं α तथा β के लिए आव्यूह $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, समीकरण $A^{20}+\alpha A^{19}+\beta A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ को सन्तुष्ट करता है, तो $\beta-\alpha$ बराबर है_____.

26. माना A एक 2 कोटि का सममित आव्यूह है, जिसके अवयव पूर्णांक हैं। यदि A^2 के विकर्ण के अवयवों का योगफल 1 हैं, तो ऐसे आव्यूहों की संभावित संख्या है:

(1) 4 (2) 1 (3) 6 (4) 12

27. माना 2 × 1 के दो आव्यूह $A=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ है जिनके अवयव वास्तविक हैं तथा $A = XB$ है, जहाँ $X=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{bmatrix}$ और $k \in R$ है। यदि $a_1^2+a_2^2=\frac{2}{3}\left(b_1^2+b_2^2\right)$ तथा $(k^2+1)b_2^2 \neq -2b_1b_2$ है, तो k का मान है _______है।

28. मान $A=\begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}, i=\sqrt{-1}$ हैं। तो रैखिक समीकरण निकाय $A^8\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 64 \end{bmatrix}$:

(1) का अद्वितीय हल है (2) के अनंत हल हैं

(3) का कोई हल नहीं है (4) के मात्र दो हल हैं

29. 3 × 3 के आव्यूहों A, जिनके अवयव समुच्चय {0, 1, 2, 3} में से हैं तथा AA^T के विकर्ण के सभी अवयवों का योगफल 9 है, की कुल संख्या है _____ ।

30. यदि x, y, z समान्तर श्रेढ़ी में हैं जिसका सार्वअन्तर d,($x \neq 3d$) है और आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 4\sqrt{2} & x \\ 4 & 5\sqrt{2} & y \\ 5 & k & z \end{bmatrix}$ का सारणिक शून्य है, तो k^2 का मान है:

(1) 72 (2) 12 (3) 36 (4) 6

31. माना $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ हैं, जिनके लिए $AB = B$ तथा $a + d = 2021$ हैं, तो $ad - bc$ का मान बराबर है ________ ।

32. यदि $A=\begin{pmatrix} 0 & \sin\alpha \\ \sin\alpha & 0 \end{pmatrix}$ तथा $\det\left(A^2-\frac{1}{2}I\right)=0$, है, तो α का एक संभव मान है :

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{6}$

33. यदि $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ है, तो $\det(A^4) + \det\left(A^{10}-(\text{Adj}(2A))^{10}\right)$ का मान बराबर है _________

34. माना $A+2B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $2A-B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ हैं। यदि Tr(A), आव्यूह A, के विकर्ण के सभी अवयवों के योगफल को दर्शाता है, तो Tr(A) – Tr(B) का मान बराबर है :

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) 3

35. माना I, कोटि 2 × 2 का तत्समक आव्यूह है तथा $P=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ है। तो $n \in N$ का वह मान, जिसके लिए $P^n = 5I - 8P$ है, बराबर है _______.

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a & 0 \end{bmatrix}, a \in R$

and $P = \dfrac{A + A^T}{2} = \begin{bmatrix} 2 & \dfrac{3+a}{2} \\ \dfrac{a+3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

and $Q = \dfrac{A - A^T}{2} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{3-a}{2} \\ \dfrac{a-3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

As, det (Q) = 9

$\Rightarrow (a-3)^2 = 36$

$\Rightarrow a = 3 \pm 6$

$\therefore \boxed{a = 9, -3}$

$\therefore$ $\det.(P) = \begin{vmatrix} 2 & \dfrac{3+a}{2} \\ \dfrac{a+3}{2} & 0 \end{vmatrix}$

$= 0 - \dfrac{(a-3)^2}{4} = 0, \text{ for } a = -3$

$= 0 - \dfrac{(a-3)^2}{4} = -\dfrac{1}{4}(12)(12), \text{ for } a = 9$

$\therefore$ Modulus of the sum of all possible values of

det. (P) = $|-36| + |0| = 36$ Ans.

$\Rightarrow$ Option (1) is correct

2. Official Ans. by NTA (910)

Sol. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + C$

where $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C^4 = C^5 = ...$

$B = 7\,A^{20} - 20\,A^7 + 2I$

$= 7\,(I + C)^{20} - 20\,(I + C)^7 + 2I$

$= 7(I + 20C + {}^{20}C_2\,C^2) - 20\,(I + 7C + {}^7C_2\,C^2) + 2I$

So $b_{13} = 7 \times {}^{20}C_2 - 20 \times {}^7C_2 = \boxed{910}$

3. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $|A| = -\dfrac{y}{x} + 2\sin x + 2$

$\dfrac{dy}{dx} = |A|$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x} + 2\sin x + 2$

$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 2\sin x + 2$

$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$

$\Rightarrow yx = \int x(2\sin x + 2)dx$

$xy = x^2 - 2x\cos x + 2\sin x + c$ .....(i)

Now $x = \pi, y = \pi + 2$

Use in (i)

$c = 0$

Now (i) be comes

$xy = x^2 - 2x\cos x + 2\sin x$

put $x = \pi/2$

$\dfrac{\pi}{2}y = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 - 2.\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2} + 2\sin\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}y = \dfrac{\pi^2}{4} + 2$

4. Official Ans. by NTA (108)

Sol. $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

$|A|=4$

$\left|3\text{adj}(2A^{-1})\right|=\left|3.2^2\text{adj}(A^{-1})\right|$

$=12^3\left|\text{adj}(A^{-1})\right|=12^3|A^{-1}|^2=\dfrac{12^3}{|A|^2}=\dfrac{12^3}{16}=108$

5. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

Let $x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$AX=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}+a_{13}\\ a_{21}+a_{22}+a_{23}\\ a_{31}+a_{32}+a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow AX = X$

Replace X by AX

$A^2X = AX = X$

Replace X by AX

$A^3X = AX = X$

Let $A^3=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{bmatrix}$

$A^3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+x_2+x_3\\ y_1+y_2+y_3\\ z_1+z_2+z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

Sum of all the element = 3

6. Official Ans. by NTA (3125)

Sol. Let matrix $B=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & n & i\end{bmatrix}$

$\because\ AB = BA$

$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}d & e & f\\ a & b & c\\ g & h & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & a & c\\ e & d & f\\ h & g & i\end{bmatrix}$

$\Rightarrow d = b,\ e = a,\ f = c,\ g=h$

$\therefore$ Matrix $B=\begin{bmatrix}a & b & c\\ b & a & c\\ g & g & i\end{bmatrix}$

No. of ways of selecting a, b, c, g, i

$= 5\times5\times5\times5\times5$

$= 5^5 = 3125$

$\therefore$ No. of Matrices B = 3125

7. Official Ans. by NTA (16)

Sol. $|A| = ad - bc = 15$

where $a,b,c,d \in \{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}$

Case I $ad = 9$ & $bc = -6$

For ad possible pairs are (3,3), (–3,–3)

For bc possible pairs are (3,–2), (–3,2), (–2,3),(2,–3)

So total matrix = 2 × 4 = 8

Case II $ad = 6$ & $bc = -9$

Similarly total matrix = 2 × 4 = 8

$\Rightarrow$ Total such matrices are = 16

8. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

$P^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\vdots$

$\therefore\ P^{50} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 25 & 1 \end{bmatrix}$

9. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, |A| = 6$

$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 2\beta \\ -\beta & 4\beta \end{bmatrix}$

$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{2}{3} \\ \beta &= -\frac{1}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$4(\alpha - \beta) = 4(1) = 4$

10. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $C = A^2 - B^2; |C| \neq 0$

$A^5 = B^5$ and $A^3B^2 = A^2B^2$

Now, $A^5 - A^3B^2 = B^5 - A^2B^3$

$\Rightarrow A^3(A^2 - B^2) + B^3(A^2 - B^2) = 0$

$\Rightarrow (A^3 + B^3)(A^2 - B^2) = 0$

Post multiplying inverse of $A^2 - B^2$:

$A^3 + B^3 = 0$

11. Official Ans. by NTA (2020)

Sol. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n^2+n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

So, required sum

$= 20 \times 3 + 2 \times \left(\frac{20 \times 21}{2}\right) + \sum_{r=1}^{20}\left(\frac{r^2+r}{2}\right)$

$= 60 + 420 + 105 + 35 \times 41 = 2020$

12. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $AA^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

$Q^2 = A^TBA\ A^TBA = A^TBIBA$

$\Rightarrow Q^2 = A^T B^2 A$

$Q^3 = A^TB^2AA^TBA \Rightarrow Q^3 = A^TB^3A$

Similarly : $Q^{2021} = A^T B^{2021} A$ ...... (1)

Now $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3i & 1 \end{pmatrix}$

Similarly $B^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2021i & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ AQ^{2021} A^T = AA^T B^{2021} AA^T = IB^{2021}I$

$\Rightarrow AQ^{2021} A^T = B^{2021} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2021i & 1 \end{pmatrix}$

$\therefore\ (AQ^{2021} A^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2021i & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2021i & 1 \end{pmatrix}$

13. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&1\\1&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow A^4=\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

$A^n=\begin{bmatrix}1&0&0\\n-1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

$A^{2025}-A^{2020}=\begin{bmatrix}0&0&0\\5&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$A^6-A=\begin{bmatrix}0&0&0\\5&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

14. Official Ans. by NTA (4)

Sol. adj $(2A) = 2^2$ adjA

$\Rightarrow$ adj(adj (2A)) = adj(4 adjA) = 16 adj (adj A)

$= 16\,|A|\,A$

$\Rightarrow$ adj $(32\,|A|\,A) = (32\,|A|)^2$ adj A

$12(32|A|)^2$ |adj A| $= 2^3\,(32|A|)^6$ |adj A|

$2^3.2^{30}\,|A|^6\,.\,|A|^2 = 2^{41}$

$|A|^8 = 2^8 \Rightarrow |A| = \pm 2$

$|A|^2 = |A|^2 = 4$

15. Official Ans. by NTA (1)

Sol. Given matrix $A=\begin{bmatrix}0&2\\k&-1\end{bmatrix}$

$A^4 + 3\,IA = 2I$

$\Rightarrow A^4 = 2I - 3A$

Also characteristic equation of A is

$|A-\lambda I| = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}0-\lambda & 2\\ k & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \lambda + \lambda^2 - 2k = 0$

$\Rightarrow A + A^2 = 2K.I$

$\Rightarrow A^2 = 2KI - A$

$\Rightarrow A^4 = 4K^2I + A^2 - 4AK$

Put $A^2 = 2KI - A$

and $A^4 = 2I - 3A$

$2I - 3A = 4K^2I + 2KI - A - 4AK$

$\Rightarrow I(2 - 2K - 4K^2) = A(2-4K)$

$\Rightarrow -2I(2K^2+K-1) = 2A(1-2K)$

$\Rightarrow -2I(2K-1)(K+1) = 2A(1-2K)$

$\Rightarrow (2K-1)(2A) - 2I(2K-1)(K+1) = 0$

$\Rightarrow (2K-1)[2A-2I(K+1)] = 0$

$\Rightarrow K = \dfrac{1}{2}$

16. Official Ans. by NTA (8)

Sol. $(I-A)^3 = I^3 - A^3 - 3A(I-A) = I - A^3$

$\Rightarrow 3A(I-A) = 0$ or $A^2 = A$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}a^2 & ab+bd\\ 0 & d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\0&d\end{bmatrix}$

$\Rightarrow a^2 = a,\ b(a+d-1) = 0,\ d^2 = d$

If $b \neq 0$, $a + d = 1 \Rightarrow 4$ ways

If $b = 0$, $a = 0, 1$ & $d = 0, 1 \Rightarrow 4$ ways

$\Rightarrow$ Total 8 matrices

17. Official Ans. by NTA (3)

Sol.
$$\begin{bmatrix} \overset{\surd}{a_{11}} & \overset{\surd}{a_{12}} & \overset{\surd}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$J_{6+i,3} - J_{i+3,3}$; $i \le j$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{6+i}}{x^3-1} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{i+3}}{x^3-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{1/2} \frac{x^{i+3}\left(x^3-1\right)}{x^3-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{3+i+1}}{3+i+1} = \left(\frac{x^{4+i}}{4+i}\right)_0^{1/2}$$

$$a_{ij} = j_{6+i,3} - j_{i+3,3} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{4+i}}{4+i}$$

$$a_{11} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} = \frac{1}{5.2^5}$$

$$a_{12} = \frac{1}{5.2^5}$$

$$a_{13} = \frac{1}{5.2^5}$$

$$a_{22} = \frac{1}{6.2^6}$$

$$a_{23} = \frac{1}{6.2^6}$$

$$a_{33} = \frac{1}{7.2^7}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5.2^5} & \frac{1}{5.2^5} & \frac{1}{5.2^5} \\ 0 & \frac{1}{6.2^6} & \frac{1}{6.2^6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7.2^7} \end{bmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{5.2^5}\left[\frac{1}{6.2^6} \times \frac{1}{7.2^7}\right]$$

$$|A| = \frac{1}{210.2^{18}}$$

$$\left|\text{adj}A^{-1}\right| = \left|A^{-1}\right|^{n-1} = \left|A^{-1}\right|^2 = \frac{1}{\left(|A|\right)^2}$$

$$\Rightarrow (210.2^{18})^2$$

$$(105)^2 \times 2^{38}$$

18. Official Ans. by NTA (3)

Sol. Let $A^T = A$ and $B^T = -B$

$C = A^2B^2 - B^2A^2$

$C^T = (A^2B^2)^T - (B^2A^2)^T$

$= (B^2)^T(A^2)^T - (A^2)^T(B^2)^T$

$= B^2A^2 - A^2B^2$

$C^T = -C$

C is skew symmetric.

So $\det(C) = 0$

so system have infinite solutions.

19. Official Ans. by NTA (540)

Sol.
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + i^2 = 7$

Case-I : Seven (1's) and two (0's)

$${}^9C_2 = 36$$

Case-II : One (2) and three (1's) and five (0's)

$$\frac{9!}{5!3!} = 504$$

$\therefore$ Total = 540

20. Official Ans. by NTA (17)

Sol. $PQ = kI$

$|P|.|Q| = k^3$

$\Rightarrow |P| = 2k \neq 0 \Rightarrow$ P is an invertible matrix

$\because PQ = kI$

$\therefore Q = kP^{-1}I$

$\therefore Q = \dfrac{\text{adj.}P}{2}$

$\because q_{23} = -\dfrac{k}{8}$

$\therefore \dfrac{-(3\alpha+4)}{2} = -\dfrac{k}{8} \Rightarrow k = 4$

$\therefore |P| = 2k \Rightarrow k = 10 + 6\alpha$ ...(i)

Put value of k in (i).. we get $\alpha = -1$

21. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $|A| = 4$

$\Rightarrow |2A| = 2^3 \times 4 = 32$

$\because$ B is obtained by $R_2 \to 2R_2 + 5R_3$

$\Rightarrow |B| = 2 \times 32 = 64$

option (4)

22. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $A = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ $\quad AA^T = I_2$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha-\alpha\beta \\ \alpha-\alpha\beta & \alpha^2+\beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \alpha^2 = 0 \;\&\; \beta^2 = 1$

$\therefore \alpha^4 + \beta^4 = 1$

23. Official Ans. by NTA (7)

Sol. $A^2 = I$

$\Rightarrow AA' = 1$ (as $A' = A$)

$\Rightarrow$ A is orthogonal

So, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ and $xy + yz + zx = 0$

$\Rightarrow (x + y + z)^2 = 1 + 2 \times 0$

$\Rightarrow x + y + z = 1$

Thus,

$x^3 + y^3 + z^3 = 3 \times 2 + 1 \times (1 - 0)$

$= 7$

24. Official Ans. by NTA (13)

Sol. $a^2 + b^2 = |I_2 + A||I_2 - A|^{-1}$

$= \sec^2\dfrac{\theta}{2} \times \cos^2\dfrac{\theta}{2} = 1$

25. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hence

$A^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{20} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{19} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{19} & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

So $A^{20} + \alpha A^{19} + \beta A = \begin{bmatrix} 1+\alpha+\beta & 0 & 0 \\ 0 & 2^{20}+\alpha.2^{19}+2\beta & 0 \\ 3\alpha+3\beta & 0 & 1-\alpha-\beta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Therefore $\alpha + \beta = 0$ and $2^{20} + 2^{19}\alpha - 2\alpha = 4$

$\Rightarrow \alpha = \dfrac{4(1-2^{18})}{2(2^{18}-1)} = -2$

hence $\beta = 2$

so $(\beta - \alpha) = 4$

26. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, a, b, c $\in$ I

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & b(a+c) \\ b(a+c) & b^2+c^2 \end{pmatrix}$$

Sum of the diagonal entries of

$A^2 = a^2 + 2b^2 + c^2$

Given $a^2 + 2b^2 + c^2 = 1$, a, b, c $\in$ I

$b = 0$ & $a^2 + c^2 = 1$

Case–1 : $a = 0 \Rightarrow c = \pm 1$ (2-matrices)

Case-2 : $c = 0 \Rightarrow a = \pm 1$ (2-matrices)

Total = 4 matrices

27. Official Ans by NTA (1)

Sol. A = XB

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}a_1 \\ \sqrt{3}a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 - b_2 \\ b_1 + kb_2 \end{bmatrix}$$

$b_1 - b_2 = \sqrt{3}a_1$ ...(1)

$b_1 + kb_2 = \sqrt{3}a_2$ ...(2)

Given, $a_1^2 + a_2^2 = \frac{2}{3}\left(b_1^2 + b_2^2\right)$

$(1)^2 + (2)^2$

$(b_1 + b_2)^2 + (b_1 + kb_2)^2 = 3(a_1^2 + a_2^2)$

$$a_1^2 + a_2^2 = \frac{2}{3}b_1^2 + \frac{(1+k^2)}{3}b_2^2 + \frac{2}{3}b_1b_2(k-1)$$

Given, $a_1^2 + a_2^2 = \frac{2}{3}b_1^2 + \frac{2}{3}b_2^2$

On comparing we get

$\frac{k^2+1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow k^2 + 1 = 2$

$\Rightarrow k = \pm 1$ ...(3)

& $\frac{2}{3}(k-1) = 0 \Rightarrow k = 1$ ...(4)

From both we get k = 1

28. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $A = \begin{bmatrix} i & -i \\ -i & i \end{bmatrix}$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = 2^2\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 8\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = 64\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 128\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^8\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 64 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 128\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 64 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 128\begin{bmatrix} x-y \\ -x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 64 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x - y = \frac{1}{16}$ .....(1)

& $-x + y = \frac{1}{2}$ .....(2)

$\Rightarrow$ From (1) & (2) : No solution.

29. Official Ans. by NTA (766)

Sol. Let $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

diagonal elements of

AA^T, $a^2+b^2+c^2$, $d^2+e^2+f^2$, $g^2+b^2+c^2$

Sum $= a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2+g^2+h^2+i^2 = 9$

a, b, c, d, e, f, g, h, i $\in \{0, 1, 2, 3\}$

	Case	No. of Matrices
(1)	All – 1s	$\frac{9!}{9!}=1$
(2)	One $\to$ 3 remaining-0	$\frac{9!}{1!\times 8!}=9$
(3)	One-2 five-1s three-0s	$\frac{9!}{1!\times 5!\times 3!}=8\times 63$
(4)	two – 2's one-1 six-0's	$\frac{9!}{2!\times 6!}=63\times 4$

Total no. of ways = $1 + 9 + 8 \times 63 + 63 \times 4$

$= \boxed{766}$

30. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $\begin{vmatrix} 3 & 4\sqrt{2} & x \\ 4 & 5\sqrt{2} & y \\ 5 & k & z \end{vmatrix} = 0$

$R_2 \to R_1 + R_3 - 2R_2$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 4\sqrt{2} & x \\ 0 & k-6\sqrt{2} & 0 \\ 5 & k & z \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \left(k-6\sqrt{2}\right)(3z-5x)=0$

if $3z - 5x = 0 \Rightarrow 3(x + 2d) - 5x = 0$

$\Rightarrow x = 3d$ (Not possible)

$\Rightarrow k = 6\sqrt{2}$ $\Rightarrow k^2 = 72$ **Option (1)**

31. Official Ans. by NTA (2020)

Sol. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

$AB = B$

$\Rightarrow (A - I)\, B = O$

$\Rightarrow |A - I| = O$, since $B \neq O$

$\begin{vmatrix} (a-1) & b \\ c & (d-1) \end{vmatrix} = 0$

$ad - bc = 2020$

32. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $A^2 = \sin^2\alpha\, I$

So, $\left|A^2 - \frac{I}{2}\right| = \left(\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

33. Official Ans. by NTA (16)

Sol. $2A\ \text{adj}\ (2A) = |2A|I$

$\Rightarrow A\ \text{adj}\ (2A) = -4I$ ....(i)

Now, $E = |A^4| + |A^{10} - (\text{adj}(2A))^{10}|$

$= (-2)^4 + \frac{|A^{20} - A^{10}(\text{adj}\ 2A)^{10}|}{|A|^{10}}$

$= 16 + \frac{|A^{20} - (A\,\text{adj}(2A))^{10}|}{|A|^{10}}$

$= 16 + \frac{|A^{20} - 2^{10} I|}{2^{10}}$ (from (1))

Now, characteristic roots of A are 2 and –1.

So, characteristic roots of A^{20} are 2^{10} and 1.

Hence, $(A^{20} - 2^{10} I)(A^{20} - I) = 0$

$\Rightarrow |A^{20} - 2^{10}I| = 0$ (as $A^{20} \neq I$)

$\Rightarrow E = 16$ Ans.

34. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $A+2B=\begin{pmatrix}1&2&0\\6&-3&3\\-5&3&1\end{pmatrix}$ ...(1)

$2A-B=\begin{pmatrix}2&-1&5\\2&-1&6\\0&1&2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow 4A-2B=\begin{pmatrix}4&-2&10\\4&-2&12\\0&2&4\end{pmatrix}$ ...(2)

$(1)+(2)\Rightarrow 5A=\begin{pmatrix}5&0&10\\10&-5&15\\-5&5&5\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\-1&1&1\end{pmatrix}$ and $2A=\begin{pmatrix}2&0&4\\4&-2&6\\-2&2&2\end{pmatrix}$

$\therefore\ B=\begin{pmatrix}2&0&4\\4&-2&6\\-2&2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1&5\\2&-1&6\\0&1&2\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-1&0\\-2&1&0\end{pmatrix}$

$\text{tr}(A)=1-1+1=1$

$\text{tr}(B)=-1$

tr(A) = 1 and tr(B) = –1

$\therefore$ tr(A) – tr(B) = 2

35. Official Ans. by NTA (6)

Sol. $P=\begin{bmatrix}2&-1\\5&-3\end{bmatrix}$

$5I-8P=\begin{bmatrix}5&0\\0&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}16&-8\\40&-24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-11&8\\-40&29\end{bmatrix}$

$P^2=\begin{bmatrix}-1&1\\-5&4\end{bmatrix}$

$P^3=\begin{bmatrix}3&-2\\10&-7\end{bmatrix}\Rightarrow P^6=\begin{bmatrix}-11&8\\-40&29\end{bmatrix}=P^n$

$\Rightarrow n=6$