HYPERBOLA

1. माना एक रेखा $L : 2x + y = k, k > 0$, अतिपरवलय $x^2 - y^2 = 3$ को स्पर्श करती है। यदि रेखा L, परवलय, $y^2 = \alpha x$ को भी स्पर्श करती है, तो α बराबर है –

(1) 12 (2) –12 (3) 24 (4) –24

2. अतिपरवलय, $16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 164 = 0$ पर किसी बिंदु P तथा इसकी नाभियों से बने त्रिभुज के केन्द्रक का बिन्दुपथ है:

(1) $16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 36 = 0$
(2) $9x^2 - 16y^2 + 36x + 32y - 144 = 0$
(3) $16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 144 = 0$
(4) $9x^2 - 16y^2 + 36x + 32y - 36 = 0$

3. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{\sqrt{5}}{2}$ है, पर एक बिन्दु $P(-2\sqrt{6}, \sqrt{3})$ है। यदि इस अतिपरवलय के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब अतिपरवलय के संयुग्मी अक्ष को क्रमशः बिन्दुओं Q तथा R पर काटते है, तो QR बराबर है –

(1) $4\sqrt{3}$ (2) 6 (3) $6\sqrt{3}$ (4) $3\sqrt{6}$

4. माना अतिपरवलय $2x^2 - y^2 = 2$ पर दो बिन्दु A $(\sec\theta, 2\tan\theta)$ तथा B $(\sec\phi, 2\tan\phi)$ हैं जिनके लिए $\theta + \phi = \pi/2$ है। यदि A तथा B पर अतिपरवलय के अभिलंबों का प्रतिच्छेदन बिन्दु (α, β) है, तो $(2\beta)^2$ बराबर है ____________।

5. यदि वक्र $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ तथा $\frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{d} = 1$ एक दूसरे को 90° के कोण पर काटते हैं, तो निम्न में से कौन सा संबंध सत्य है?

(1) $a + b = c + d$ (2) $a - b = c - d$
(3) $a - c = b + d$ (4) $ab = \frac{c+d}{a+b}$

6. माना $f:R \to R$, $f(x) = 2x - 1$ द्वारा तथा $g : R - \{1\} \to R$, $g(x) = \frac{x - \frac{1}{2}}{x-1}$ द्वारा परिभाषित हैं। तो संयुक्त फलन $f(g(x))$:

(1) आच्छादक है परन्तु एकैकी नहीं है
(2) एकैकी तथा आच्छादक दोनों है
(3) एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है
(4) न एकैकी है और न आच्छादक है

7. रेखाओं $(\sqrt{3})kx + ky - 4\sqrt{3} = 0$ तथा $\sqrt{3}x - y - 4(\sqrt{3})k = 0$ के प्रतिच्छेदन बिंदु का बिंदुपथ एक शांकव है, जिसकी उत्केन्द्रता है____________।

8. एक अतिपरवलय, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ की नाभियों से होकर जाता है तथा इसके अनुप्रस्थ और संयुग्मी अक्ष क्रमशः दीर्घवत के दीर्घ और अल्प अक्षों के समरूप हैं। यदि उनकी उत्केन्द्रताओं का गुणनफल एक है, तो अतिपरवलय का समीकरण है :

(1) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$ (2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
(3) $x^2 - y^2 = 9$ (4) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

9. वत्त $x^2 + y^2 = 25$ की उस जीवा, जो अति परवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ की स्पर्श रेखा है, के मध्य बिंदु का बिंदुपथ है :

(1) $(x^2 + y^2)^2 - 16x^2 + 9y^2 = 0$
(2) $(x^2 + y^2)^2 - 9x^2 + 144y^2 = 0$
(3) $(x^2 + y^2)^2 - 9x^2 - 16y^2 = 0$
(4) $(x^2 + y^2)^2 - 9x^2 + 16y^2 = 0$

10. एक वर्ग ABCD के सभी शीर्ष वक्र $x^2y^2 = 1$ पर हैं। इसकी भुजाओं के मध्यबिंदु भी इसी वक्र पर हैं तो ABCD के क्षेत्रफल का वर्ग है_____ ।

11. एक अतिपरवलय $H : x^2 - 2y^2 = 4$ का विचार कीजिए। माना बिंदु $P\left(4, \sqrt{6}\right)$ पर स्पर्श रेखा x-अक्ष को Q पर मिलती है तथा नाभि जीवा को $R(x_1, y_1)$, $x_1 > 0$ पर मिलती है। यदि H की नाभि F बिंदु P के निकट है, तो ΔQFR का क्षेत्रफल बराबर है:

(1) $4\sqrt{6}$ (2) $\sqrt{6}-1$

(3) $\frac{7}{\sqrt{6}}-2$ (4) $4\sqrt{6}-1$

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (4)

Sol. Tangent to hyperbola of

Slope m = –2 (given)

$$y = -2x \pm \sqrt{3(3)}$$

$$\left(y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}\right)$$

$\Rightarrow y + 2x = \pm 3 \Rightarrow 2x + y = 3 \quad (k > 0)$

For parabola $y^2 = \alpha x$

$$y = mx + \frac{\alpha}{4m}$$

$$\Rightarrow y = -2x + \frac{\alpha}{-8}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{-8} = 3$$

$\Rightarrow \alpha = -24.$

2. Official Ans. by NTA (1)

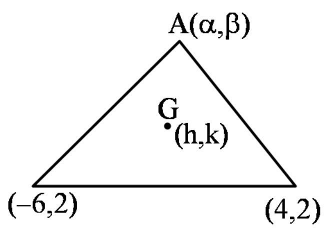
Sol. Given hyperbola is

$16(x + 1)^2 - 9(y - 2)^2 = 164 + 16 - 36 = 144$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

Eccentricity, $e = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow$ foci are (4, 2) and (–6, 2)



Let the centroid be (h, k)

& A(α, β) be point on hyperbola

So $h = \frac{\alpha - 6 + 4}{3}, k = \frac{\beta + 2 + 2}{3}$

$\Rightarrow \alpha = 3h + 2, \beta = 3k - 4$

(α, β) lies on hyperbola so

$16(3h + 2 + 1)^2 - 9(3k - 4 - 2)^2 = 144$

$\Rightarrow 144(h + 1)^2 - 81(k - 2)^2 = 144$

$\Rightarrow 16(h^2 + 2h + 1) - 9(k^2 - 4k + 4) = 16$

$\Rightarrow 16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 36 = 0$

3. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $P(-2\sqrt{6}, \sqrt{3})$ lies on hyperbola

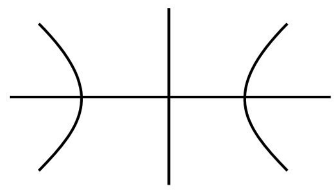
$$\Rightarrow \frac{24}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \quad ....(i)$$

$$e = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow b^2 = a^2\left(\frac{5}{4} - 1\right) \Rightarrow 4b^2 = a^2$$

Put in (i) $\Rightarrow \frac{6}{b^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \Rightarrow b = \sqrt{3}$

$\Rightarrow a = \sqrt{12}$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$$



Tangent at P :

$$\frac{-x}{\sqrt{6}} - \frac{y}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow Q\ (0, \sqrt{3})$$

Slope of $T = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Normal at P :

$y - \sqrt{3} = \sqrt{2}(x + 2\sqrt{6})$

$\Rightarrow R = (0, 5\sqrt{3})$

QR = $6\sqrt{3}$

4. Official Ans. by NTA (36)

ALLEN Ans. (Bonus)

Sol. Since, point A ($\sec\theta$, $2\tan\theta$) lies on the hyperbola

$2x^2 - y^2 = 2$

Therefore, $2\sec^2\theta - 4\tan^2\theta = 2$

$\Rightarrow 2 + 2\tan^2\theta - 4\tan^2\theta = 2$

$\Rightarrow \tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

Similarly, for point B, we will get $\phi = 0$.

but according to question $\theta + \phi = \frac{\pi}{2}$

which is not possible.

Hence it must be a 'BONUS'.

5. Official Ans. by NTA (2)

Sol. For orthogonal curves $a - c = b - d$

$\Rightarrow a - b = c - d$

6. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2\left(\frac{2x-1}{2(x-1)}\right) - 1$

$$= \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

Range of $f(g(x)) = \mathbb{R} - \{1\}$

Range of $f(g(x))$ is not onto

& $f(g(x))$ is one-one

So $f(g(x))$ is one-one but not onto.

7. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $K = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}x + y} = \frac{\sqrt{3}x - y}{4\sqrt{3}}$

$\Rightarrow 3x^2 - y^2 = 48$

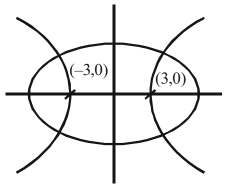
$\Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$

Now, $48 = 16(e^2 - 1)$

$\Rightarrow e = \sqrt{4} = 2$

8. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



For ellipse $e_1 = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{3}{5}$

for hyperbola $e_2 = \frac{5}{3}$

Let hyperbola be

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\because$ it passes through $(3,0) \Rightarrow \frac{9}{a_2} = 1$

$\Rightarrow a^2 = 9$

$\Rightarrow b^2 = a^2(e^2 - 1)$

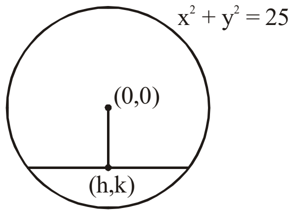
$= 9\left(\frac{25}{9} - 1\right) = 16$

$\therefore$ Hyperbola is

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ... option 2.

9. Official Ans. by NTA (4)

Sol.



Equation of chord

$y - k = -\frac{h}{k}(x - h)$

$ky - k^2 = -hx + h^2$

$hx + ky = h^2 + k^2$

$y = -\frac{hx}{k} + \frac{h^2 + k^2}{k}$

tangent to $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

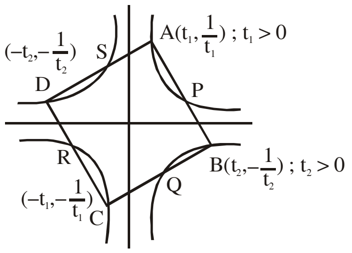
$c^2 = a^2m^2 - b^2$

$\left(\frac{h^2 + k^2}{k}\right)^2 = 9\left(-\frac{h}{k}\right)^2 - 16$

$(x^2 + y^2)^2 = 9x^2 - 16y^2$

10. Official Ans. by NTA (80)

Sol. xy = 1, –1



$$\frac{t_1+t_2}{2}\cdot\frac{\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}}{2}=1$$

$\Rightarrow t_1^2 - t_2^2 = 4t_1t_2$

$$\frac{1}{t_1^2}\times\left(-\frac{1}{t_2^2}\right)=-1\Rightarrow t_1t_2=1$$

$\Rightarrow (t_1t_2)^2 = 1 \Rightarrow t_1t_2 = 1$

$t_1^2 - t_2^2 = 4$

$$\Rightarrow t_1^2+t_2^2=\sqrt{4^2+4}=2\sqrt{5}$$

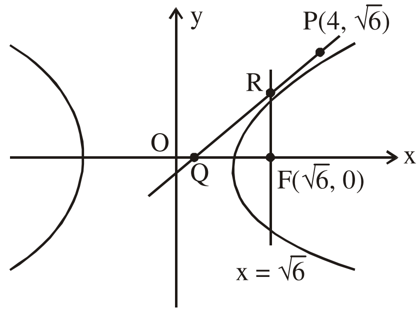
$$\Rightarrow t_1^2 = 2+\sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{t_1^2}=\sqrt{5}-2$$

$$AB^2 = (t_1-t_2)^2+\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)^2$$

$$=2\left(t_1^2+\frac{1}{t_1^2}\right)=4\sqrt{5} \Rightarrow \text{Area}^2 = 80$$

11. Official Ans. by NTA (3)

Sol.



$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$$

$$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\therefore$ Focus F(ae, 0) $\Rightarrow F\left(\sqrt{6},0\right)$

equation of tangent at P to the hyperbola is

$2x - y\sqrt{6} = 2$

tangent meet x-axis at Q(1, 0)

& latus rectum $x = \sqrt{6}$ at $R\left(\sqrt{6},\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{6}-1\right)\right)$

$\therefore$ Area of $\Delta_{QFR} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-1\right).\frac{2}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{6}-1\right)$

$$=\frac{7}{\sqrt{6}}-2$$