FUNCTION

1. माना [x] महत्तम पूर्णांक $\leq x$ है, जहाँ $x \in \mathbf{R}$ है। यदि वास्तविक मान फलन $f(x)=\sqrt{\frac{|[x]|-2}{|[x]|-3}}$ का प्रांत $(-\infty, a) \cup [b, c) \cup [4, \infty), a < b < c,$ है, तो $a + b + c$ का मान है:

(1) 8 (2) 1 (3) –2 (4) –3

2. माना $f : \mathbf{R} - \left\{\frac{\alpha}{6}\right\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{5x+3}{6x-\alpha}$ द्वारा परिभाषित है। तो α का मान जिसके लिए, $(fof)(x) = x$, $\forall\ x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{\alpha}{6}\right\}$ है, है :

(1) ऐसे किसी α का अस्तित्व नहीं है।

(2) 5

(3) 8

(4) 6

3. माना [x] महत्तम पूर्णांक $\leq x$ है। तो समीकरण $[e^x]^2 + [e^x + 1] - 3 = 0$ को संतुष्ट करने वाली सभी वास्तविक संख्याएं x, निम्न में से किस अन्तराल में है ?

(1) $\left[0, \frac{1}{e}\right)$ (2) $[\log_e 2, \log_e 3)$

(3) [1, e) (4) $[0, \log_e 2)$

4. माना : A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} एक समुच्चय है। तो फलनों $f : A \to A$, जो आच्छादक तथा एकैकी दोनों है तथा $f(1) + f(2) = 3 - f(3)$ को संतुष्ट करते है, की संख्या बराबर है ________।

5. माना $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$
$g(3n + 1) = 3n + 2,$
$g(3n + 2) = 3n + 3,$
$g(3n + 3) = 3n + 1$, सभी $n \geq 0$, के लिए,
द्वारा परिभाषित है। तो निम्न में से कौन–सा कथन सत्य है ?

(1) एक आच्छादक फलन $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ का अस्तित्व है जिसके लिए $fog = f$ है

(2) एक एकैकी फलन $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ का अस्तित्व है जिसके लिए $fog = f$ है

(3) gogog = g

(4) एक फलन $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ का अस्तित्व है जिसके लिए $gof = f$ है

6. यदि [x] महत्तम पूर्णांक $\leq x$ है, तो $\sum_{n=8}^{100}\left[\frac{(-1)^n n}{2}\right]$ बराबर है :

(1) 0 (2) 4 (3) –2 (4) 2

7. फलनों $f : A \to B$ तथा $g : B \to C$ पर विचार कीजिए $(A, B, C \subseteq \mathbf{R})$, जिनके लिये $(gof)^{-1}$ का अस्तित्व है, तो :

(1) f तथा g दोनों एकैकी हैं

(2) f तथा g दोनों आच्छादक हैं

(3) f एकैकी है तथा g आच्छादक है

(4) f आच्छादक है तथा g एकैकी है

8. माना S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} है। तो ऐसे फलनों $f: S \to S$ जिनके लिए $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)\ \forall\ m, n \in S$ तथा $m \cdot n \in S$ है, की संख्या बराबर है ______।

9. माना $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$f(x + y) + f(x - y) = 2 f(x) f(y),\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

द्वारा परिभाषित है। तो $\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{\sin(k)\sin(k+f(k))}$

बराबर है :

(1) $\operatorname{cosec}^2(21)\cos(20)\cos(2)$

(2) $\sec^2(1)\sec(21)\cos(20)$

(3) $\operatorname{cosec}^2(1)\operatorname{cosec}(21)\sin(20)$

(4) $\sec^2(21)\sin(20)\sin(2)$

10. फलन $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1+x}{x}\right)$ का प्रांत है –

(1) $\left(-1,-\frac{1}{2}\right] \cup (0,\infty)$ (2) $\left[-\frac{1}{2},0\right) \cup [1,\infty)$

(3) $\left(-\frac{1}{2},\infty\right) - \{0\}$ (4) $\left[-\frac{1}{2},\infty\right) - \{0\}$

11. माना $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ एक फलन है, जिसके लिए

$f(m + n) = f(m) + f(n)\ \forall\ m, n \in \mathbf{N}$ है।

यदि $f(6) = 18$ है, तो $f(2) \cdot f(3)$ बराबर है :

(1) 6 (2) 54 (3) 18 (4) 36

12. फलन

$f(x) = \log_{\sqrt{5}}\left(3+\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)\right)$

का परिसर है :

(1) $(0,\sqrt{5})$ (2) $[-2, 2]$

(3) $\left[\frac{1}{\sqrt{5}},\sqrt{5}\right]$ (4) $[0, 2]$

13. माना 3 घात का एक बहुपद $f(x)$ इस प्रकार है कि $K = 2, 3, 4, 5$ के लिए $f(k) = -\frac{2}{k}$ है। तब $52 - 10f(10)$ का मान के बराबर है ________ ।

14. माना $f, g : N \to N$ है, जिनके लिए $f(n + 1) = f(n) + f(1)\ \forall\ n \in N$ है तथा g एक स्वेच्छ फलन है। निम्न में से कौनसा कथन सत्य नहीं है ?

(1) यदि fog एकैकी है, तो g एकैकी हैं

(2) यदि f आच्छादक है, तो $f(n) = n\ \forall\ n \in N$ है

(3) f एकैकी है

(4) यदि g आच्छादक है, तो fog एकैकी है

15. एक फलन $f(x)$, $f(x) = \frac{5^x}{5^x + 5}$, द्वारा दिया गया है, तो श्रेणी $f\left(\frac{1}{20}\right)+f\left(\frac{2}{20}\right)+f\left(\frac{3}{20}\right)+......+f\left(\frac{39}{20}\right)$ का योगफल बराबर है :

(1) $\frac{19}{2}$ (2) $\frac{49}{2}$ (3) $\frac{29}{2}$ (4) $\frac{39}{2}$

16. माना $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ है तथा $f : A \to A$,

$f(k) = \begin{cases} k+1 & \text{यदि k विषम है} \\ k & \text{यदि k सम है} \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

तो ऐसे फलनों $g : A \to A$, जिनके लिए $gof = f$ है, की सम्भावित संख्या है

(1) 10^5 (2) ${}^{10}C_5$ (3) 5^5 (4) $5!$

17. माना $f(x) = \sin^{-1}x$ तथा $g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 6}$ है। यदि $g(2) = \lim_{x\to 2} g(x)$, तो फलन fog का प्रांत है :

(1) $(-\infty, -2] \cup \left[-\frac{3}{2}, \infty\right)$

(2) $(-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$

(3) $(-\infty, -2] \cup \left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$

(4) $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$

18. माना R पर परिभाषित कोई फलन f है तथा माना यह $|f(x) - f(y)| \le |(x - y)^2|, \ \forall\ (x,y) \in R$ को संतुष्ट करता है।

यदि $f(0) = 1$ है, तो :

(1) $f(x)$, R में कोई भी मान ले सकता है

(2) $f(x) < 0, \forall\ x \in R$

(3) $f(x) = 0, \forall\ x \in R$

(4) $f(x) > 0, \forall\ x \in R$

19. यदि $a + \alpha = 1$, $b + \beta = 2$ तथा $af(x) + \alpha f\left(\frac{1}{x}\right) = bx + \frac{\beta}{x}, x \ne 0$ हैं, तो $\frac{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)}{x + \frac{1}{x}}$ बराबर है

20. अन्तराल $[0, 2\pi]$ में समीकरण $x + 2\tan x = \frac{\pi}{2}$ के हलों की संख्या है :

(1) 3 (2) 4 (3) 2 (4) 5

21. $y = 5^{\log x}$ का प्रतिलोम है :

(1) $x = 5^{\log y}$

(2) $x = y^{\log 5}$

(3) $x = y^{\frac{1}{\log 5}}$

(4) $x = 5^{\frac{1}{\log y}}$

22. यदि फलन $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = \sqrt{1-x}$ हैं, तो फलनों $f+g$, $f-g$, f/g, g/f, $g-f$, जहाँ $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$, $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ हैं, का समान (common) प्रांत है :

(1) $0 \le x \le 1$

(2) $0 \le x < 1$

(3) $0 < x < 1$

(4) $0 < x \le 1$

23. माना $f : R - \{3\} \rightarrow R - \{1\}$, $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ द्वारा परिभाषित है। माना $g : R \rightarrow R$, $g(x) = 2x - 3$ द्वारा दिया गया है। तो x के सभी मानों, जिनके लिए $f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = \frac{13}{2}$ है, का योगफल बराबर है:

(1) 7 (2) 2 (3) 5 (4) 3

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (3)

Sol. For domain,

$$\frac{|[x]|-2}{|[x]|-3} \geq 0$$

Case I : When $|[x]|-2 \geq 0$

and $|[x]|-3 > 0$

$\therefore$ $x \in (-\infty, -3) \cup [4, \infty)$ .....(1)

Case II : When $|[x]|-2 \leq 0$

and $|[x]|-3 < 0$

$\therefore$ $x \in [-2, 3)$ .....(2)

So, from (1) and (2)

we get

Domain of function

$= (-\infty, -3) \cup [-2, 3) \cup [4, \infty)$

$\therefore$ $(a + b + c) = -3 + (-2) + 3 = -2$ $(a < b < c)$

$\Rightarrow$ Option (3) is correct.

2. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $f(x) = \dfrac{5x+3}{6x-\alpha} = y$ ......(i)

$5x + 3 = 6xy - \alpha y$

$x(6y - 5) = \alpha y + 3$

$$x = \frac{\alpha y+3}{6y-5}$$

$f^{-1}(x) = \dfrac{\alpha x+3}{6x-5}$ .....(ii)

fo f(x) = x

$f(x) = f^{-1}(x)$

From eq^n (i) & (ii)

Clearly $(\alpha = 5)$

3. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $\left[e^x\right]^2 + \left[e^x + 1\right] - 3 = 0$

$\Rightarrow \left[e^x\right]^2 + \left[e^x\right] + 1 - 3 = 0$

Let $\left[e^x\right] = t$

$\Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$

$\Rightarrow t = -2, 1$

$\left[e^x\right] = -2$ (Not possible)

or $\left[e^x\right] = 1$ $\therefore$ $1 \leq e^x < 2$

$\Rightarrow$ $\ln(1) \leq x < \ln(2)$

$\Rightarrow$ $0 \leq x < \ln(2)$

$\Rightarrow$ $x \in [0, \ln 2)$

4. Official Ans. by NTA (720)

Sol. $f(1) + f(2) = 3 - f(3)$

$\Rightarrow f(1) + f(2) = 3 + f(3) = 3$

The only possibility is : $0 + 1 + 2 = 3$

$\Rightarrow$ Elements 1, 2, 3 in the domain can be mapped with 0, 1, 2 only.

So number of bijective functions.

$= \underline{|3} \times \underline{|5} = 720$

5. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $g : N \to N \quad g(3n+1) = 3n+2$

$g(3n+2) = 3n+3$

$g(3n+3) = 3n+1$

$$g(x) = \begin{bmatrix} x+1 & x = 3k+1 \\ x+1 & x = 3k+2 \\ x-2 & x = 3k+3 \end{bmatrix}$$

$$g(g(x)) = \begin{bmatrix} x+2 & x = 3k+1 \\ x-1 & x = 3k+2 \\ x-1 & x = 3k+3 \end{bmatrix}$$

$$g(g(g(x))) = \begin{bmatrix} x & x = 3k+1 \\ x & x = 3k+2 \\ x & x = 3k+3 \end{bmatrix}$$

If $f : N \to N$, f is a one-one function such that

$f(g(x)) = f(x) \Rightarrow g(x) = x$, which is not the case

If f $f : N \to N$ f is an onto function

such that $f(g(x)) = f(x)$,

one possibility is

$$f(x) = \begin{bmatrix} n & x = 3n+1 \\ n & x = 3n+2 \\ n & x = 3n+3 \end{bmatrix} \quad n \in N_0$$

Here $f(x)$ is onto, also $f(g(x)) = f(x)\ \forall\ x \in N$

6. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $\sum_{n=8}^{100} \left[\frac{(-1)^n.n}{2}\right]$

$= 4 - 5 + 5 - 6 + 6 + \ldots - 50 + 50 = 4$

7. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $\therefore\ (gof)^{-1}$ exist $\Rightarrow$ gof is bijective

$\Rightarrow$ 'f' must be one-one and 'g' must be ONTO

8. Official Ans. by NTA (490)

Sol. F(mn) = f(m). f(n)

Put m = 1 **f(n) = f(1).** f(n) $\Rightarrow$ f(1) = 1

Put m = n = 2

$$f(4) = f(2).f(2) \begin{cases} f(2) = 1 \Rightarrow f(4) = 1 \\ \text{or} \\ f(2) = 2 \Rightarrow f(4) = 4 \end{cases}$$

Put m = 2, n = 3

$$f(6) = f(2).f(3) \begin{cases} \text{when } f(2) = 1 \\ f(3) = 1 \text{ to } 7 \\ \\ f(2) = 2 \\ f(3) = 1 \text{ or } 2 \text{ or} 3 \end{cases}$$

f(5), f(7) can take any value

Total = $(1 \times 1 \times 7 \times 1 \times 7 \times 1 \times 7) + (1 \times 1 \times 3 \times 1 \times 7 \times 1 \times 7)$

= 490

9. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f(x) = \cos \lambda x$

$\because\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

So, $-1 = \cos\frac{\lambda}{2}$

$\Rightarrow\ \lambda = 2\pi$

Thus $f(x) = \cos 2\pi x$

Now k is natural number

Thus f(k) = 1

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{\sin k \sin(k+1)} = \frac{1}{\sin 1}\sum_{k=1}^{20}\left[\frac{\sin((k+1)-k)}{\sin k \cdot \sin(k+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin 1}\sum_{k=1}^{20}(\cot k - \cot(k+1))$$

$$= \frac{\cot 1 - \cot 21}{\sin 1} = \operatorname{cosec}^2 1 \operatorname{cosec}(21) \cdot \sin 20$$

10. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $\frac{1+x}{x} \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

$\frac{1}{x} \in (-\infty,-2] \cup [0,\infty)$

$x \in \left[-\frac{1}{2},0\right) \cup (0,\infty)$

$x \in \left[-\frac{1}{2},\infty\right) - \{0\}$

11. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $f(m+n) = f(m) + f(n)$

Put m = 1, n = 1

$f(2) = 2f(1)$

Put m = 2, n = 1

$f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1)$

Put m = 3, n = 3

$f(6) = 2f(3) \Rightarrow f(3) = 9$

$\Rightarrow f(1) = 3,\ f(2) = 6$

$f(2).f(3) = 6 \times 9 = 54$

12. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $f(x) = \log_{\sqrt{5}}$

$\left(3+\cos\left(\frac{3\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-x\right)\right)$

$f(x) = \log_{\sqrt{5}}\left[3+2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x)-2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\sin(x)\right]$

$f(x) = \log_{\sqrt{5}}\left[3+\sqrt{2}(\cos x - \sin x)\right]$

Since $-\sqrt{2} \le \cos x - \sin x \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}}\left[3+\sqrt{2}(-\sqrt{2}) \le f(x) \le \log_{\sqrt{5}}\left[3+\sqrt{2}(\sqrt{2})\right]\right]$

$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}}(1) \le f(x) \le \log_{\sqrt{5}}(5)$

So Range of f(x) is [0, 2]

Option (4)

13. Official Ans. by NTA (26)

Sol. $k\,f(k) + 2 = \lambda\,(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ ...(1)

put x = 0

we get $\lambda = \frac{1}{60}$

Now put λ in equation (1)

$\Rightarrow kf(k) + 2 = \frac{1}{60}\,(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$

Put x = 10

$\Rightarrow 10f(10) + 2 = \frac{1}{60}(8)(7)(6)(5)$

$\Rightarrow 52 - 10f(10) = 52 - 26 = 26$

14. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $f(n+1) - f(n) = f(1)$

$\Rightarrow f(n) = nf(1)$

$\Rightarrow$ f is one-one

Now, Let $f(g(x_2)) = f(g(x_1))$

$\Rightarrow g(x_2) = g(x_1)$ (as f is one-one)

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (as fog is one-one)

$\Rightarrow$ g is one-one

Now, $f(g(n)) = g(n)\,f(1)$

may be many-one if

g(n) is many-one

15. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $f(x) = \frac{5^x}{5^x+5}$ $\qquad f(2-x) = \frac{5}{5^x+5}$

$f(x) + f(2-x) = 1$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{20}\right)+f\left(\frac{2}{20}\right)+\ldots+f\left(\frac{39}{20}\right)$

$=\left(f\left(\frac{1}{20}\right)+f\left(\frac{39}{20}\right)\right)+\ldots+\left(f\left(\frac{19}{20}\right)+f\left(\frac{21}{20}\right)+f\left(\frac{20}{20}\right)\right)$

$=19+\frac{1}{2}=\frac{39}{2}$

16. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{if } x \text{ is odd} \\ x, & \text{if } x \text{ is even}\end{cases}$

$\because$ g : A $\to$ A such that $g(f(x)) = f(x)$

$\Rightarrow$ If x is even then $g(x) = x$ ...(1)

If x is odd then $g(x + 1) = x + 1$ ...(2)

from (1) and (2) we can say that

$g(x) = x$ if x is even

$\Rightarrow$ If x is odd then g(x) can take any value in set A

so number of $g(x) = 10^5 \times 1$

17. Official Ans. by NTA (3)

Sol. Domain of $fog(x) = \sin^{-1}(g(x))$

$\Rightarrow |g(x)| \le 1,\ g(2) = \frac{3}{7}$

$$\left|\frac{x^2-x-2}{2x^2-x-6}\right| \le 1$$

$$\left|\frac{(x+1)(x-2)}{(2x+3)(x-2)}\right| \le 1$$

$$\frac{x+1}{2x+3} \le 1 \text{ and } \frac{x+1}{2x+3} \ge -1$$

$$\frac{x+1-2x-3}{2x+3} \le 0 \text{ and } \frac{x+1+2x+3}{2x+3} \ge 0$$

$$\frac{x+2}{2x+3} \ge 0 \text{ and } \frac{3x+4}{2x+3} \ge 0$$

$$x \in (-\infty, -2] \cup \left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$$

18. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $\left|\frac{f(x)-f(y)}{(x-y)}\right| \le |(x-y)|$

$x - y = h$ let $\Rightarrow x = y + h$

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(y+h)-f(y)}{h}\right| \le 0$$

$\Rightarrow |f'(y)| \le 0 \Rightarrow f'(y) = 0$

$\Rightarrow f(y) = k$ (constant)

and $f(0) = 1$ given

So, $f(y) = 1 \Rightarrow f(x) = 1$

19. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $af(x)+\alpha f\left(\frac{1}{x}\right)=bx+\frac{\beta}{x}$ ....(1)

replace x by $\frac{1}{x}$

$af\left(\frac{1}{x}\right)+\alpha f(x)=\frac{b}{x}+\beta x$ ....(2)

(1) + (2)

$$(a+\alpha)f(x)+(a+\alpha)f\left(\frac{1}{x}\right) = x(b+\beta)+(b+\beta)\frac{1}{x}$$

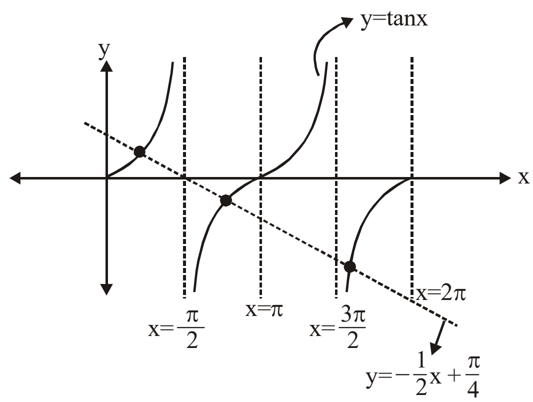
$$\frac{f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)}{x+\frac{1}{x}}=\frac{b+\beta}{a+\alpha}=\frac{2}{1}=2$$

20. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $x+2\tan x=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow 2\tan x=\frac{\pi}{2}-x$$

$$\Rightarrow \tan x=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}$$



Number of soluitons of the given eauation is '3'.

Ans. (1)

21. Official Ans. by NTA (3)

Allen Ans. (1 or 2 or 3)

Sol. Given $y = 5^{(\log_a x)} = f(x)$

Interchanging x & y for inverse

$x = 5^{(\log_a y)} = y^{(\log_a 5)}$

option (1) or option (2)

Further, from given relation

$\log_5 y = \log_a x$

$\Rightarrow x = a^{(\log_5 y)} = y^{(\log_5 a)}$

$\Rightarrow x = y^{\left(\frac{1}{\log_a 5}\right)} = f^{-1}(y)$

option (3)

22. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f(x) + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$, domain [0, 1]

$f(x) - g(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$, domain [0, 1]

$g(x) - f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x}$, domain [0, 1]

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$, domain [0, 1)

$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$, domain (0, 1]

So, common domain is (0, 1)

23. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f(x) = y = \frac{x-2}{x-3}$

$\therefore x = \frac{3y-2}{y-1}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

& $g(x) = y = 2x - 3$

$\therefore x = \frac{y+3}{2}$

$\therefore g^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

$\because f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = \frac{13}{2}$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$

$\therefore$ sum of roots

$x_1 + x_2 = 5$