ELLIPSE

1. माना $E_1 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a > b$ एक दीर्घवत्त है। माना E_2 एक और दीर्घवत्त है, जो E_1 के दीर्घ अक्ष के छोरों को स्पर्श करता है तथा E_2 की नाभियाँ, E_1 के लघु अक्ष के छोरों पर है। यदि E_1 तथा E_2 की उत्केन्द्रता बराबर है, तो उसका मान है –

(1) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (2) $\frac{-1+\sqrt{8}}{2}$

(3) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ (4) $\frac{-1+\sqrt{6}}{2}$

2. एक दीर्घवत्त, $E : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $a^2 > b^2$, बिन्दु $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)$ से होकर जाता है तथा उसकी उत्केन्द्रता $\frac{1}{\sqrt{3}}$ है। यदि एक वत्त जिसका केन्द्र E की नाभि $F(\alpha, 0)$, $\alpha > 0$ पर और त्रिज्या $\frac{2}{\sqrt{3}}$ है, दीर्घवत्त E को दो बिन्दुओं P तथा Q पर काटता है, तो PQ^2 बराबर है :

(1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{16}{3}$ (4) 3

3. यदि दीर्घवत्त, $x^2 + 4y^2 = 4$ की एक स्पर्शरेखा, इसके दीर्घ अक्ष के छोरों पर खींची गई स्पर्श रेखाओं को बिन्दुओं B तथा C पर मिलती है, तो BC को व्यास मान कर खींचा गया वत्त निम्न में से किस बिन्दु से होकर जाता है ?

(1) $(\sqrt{3},0)$ (2) $(\sqrt{2},0)$

(3) (1, 1) (4) (–1, 1)

4. माना E एक दीर्घवत्त है जिसके अक्ष, निर्देशांक अक्षों के समांतर हैं। इसका केन्द्र (3, – 4) पर, एक नाभि (4, – 4) पर तथा एक शीर्ष (5, – 4) पर हैं। यदि $mx–y=4$, $m>0$ दीर्घवत्त E की एक स्पर्श रेखा है, तो $5m^2$ का मान बराबर है_____।

5. माना दीर्घवत्त $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ पद दूसरे चतुर्थांश में एक बिंदु P इस प्रकार है कि P पर दीर्घवत की स्पर्श रेखा, रेखा $x + 2y = 0$ के लंबवत हैं। माना दीर्घवत्त की नाभियाँ S तथा S' हैं तथा इसकी उत्केन्द्रता e है। यदि त्रिभुज SPS' का क्षेत्रफल A है तो $(5 – e^2)$. A का मान है :

(1) 6 (2) 12 (3) 14 (4) 24

6. यदि दीर्घवत्त $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{4a^2}=1$ की एक स्पर्श रेखा तथा निर्देशांक अक्षों द्वारा बने त्रिभुज का न्यूनतम क्षेत्रफल kab है, तो k बराबर है _____।

7. रेखा $12x \cos\theta + 5y \sin\theta = 60$ निम्न में से किस वक्र की स्पर्श रेखा है?

(1) $x^2 + y^2 = 169$

(2) $144x^2 + 25y^2 = 3600$

(3) $25x^2 + 12y^2 = 3600$

(4) $x^2 + y^2 = 60$

8. बिंदु (–3, –5) को दीर्घवत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ के बिंदुओं से मिलाने वाले रेखाखण्डों के मध्य–बिंदुओं का बिंदुपथ है:

(1) $9x^2 + 4y^2 + 18x + 8y + 145 = 0$

(2) $36x^2 + 16y^2 + 90x + 56y + 145 = 0$

(3) $36x^2 + 16y^2 + 108x + 80y + 145 = 0$

(4) $36x^2 + 16y^2 + 72x + 32y + 145 = 0$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Ellipse

9. माना दीर्घवत्त $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ तथा वत्त $x^2 + y^2 = 3$ के प्रथम चतुर्थांश में प्रतिच्छेदन बिन्दु पर स्पर्श रेखाओं के बीच न्यून कोण θ है। तब $\tan\theta$ बराबर है :

(1) $\frac{5}{2\sqrt{3}}$ (2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (3) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (4) 2

10. यदि वक्र $x^2 + 2y^2 = 2$, रेखा $x + y = 1$ को दो बिंदुओं P तथा Q पर काटता है, तो रेखा खंड PQ द्वारा मूल बिन्दु पर बनाया गया कोण है :

(1) $\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (2) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

(3) $\frac{\pi}{2}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ (4) $\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

11. माना वक्रों $4x^2 + 9y^2 = 36$ तथा $(2x)^2 + (2y)^2 = 31$ की एक ऊभयनिष्ठ स्पर्श रेखा L है। तो रेखा L की प्रवणता का वर्ग बराबर है_____.

12. यदि दीर्घवत्त $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$ तथा वत्त $x^2 + y^2 = 4b$, $b > 4$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु वक्र $y^2 = 3x^2$ पर स्थित हैं, तो b बराबर है :

(1) 12 (2) 5 (3) 6 (4) 10

13. माना परवलय $y^2 = 4x - 20$ के बिन्दु (6, 2) पर स्पर्श रेखा L है। यदि L, दीर्घवत्त $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{b}=1$ की भी एक स्पर्श रेखा है, तो b का मान बराबर है :

(1) 11 (2) 14 (3) 16 (4) 20

14. माना दीर्घवत्त $\frac{x^2}{27}+y^2=1$ के बिंदु $\left(3\sqrt{3}\cos\theta,\sin\theta\right)$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, पर एक स्पर्श रेखा खींची गई है। तो θ का वह मान, जिसके लिए इस स्पर्श रेखा द्वारा अक्षों पर बनाए गए अंतः खंडों का योगफल निम्नतम है, बराबर है :

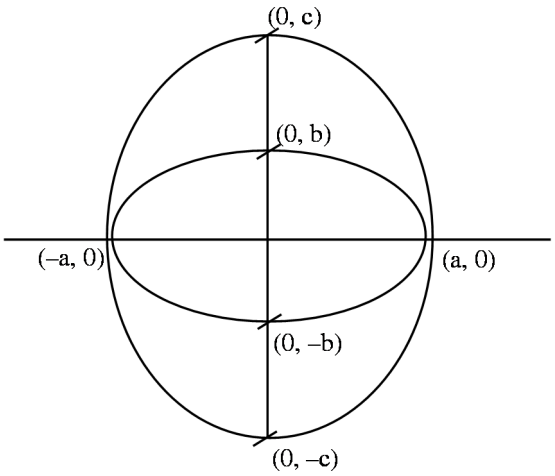
(1) $\frac{\pi}{8}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{3}$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Ellipse

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

$$e^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{c^2 =} \frac{a^4}{b^2} \Rightarrow c = \frac{a^2}{b}$$

Also b = ce

$$\Rightarrow c = \frac{b}{e}$$

$$\frac{b}{e} = \frac{a^2}{b}$$

$$\Rightarrow e = \frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2$$

$$\Rightarrow e^2 + e - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

2. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $\frac{3}{2a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ and $1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow a^2 = 3\ b^2 = 3$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1 \qquad \text{.....(i)}$$

Its focus is (1,0)

Now, eqn of circle is

$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{4}{3} \qquad \text{.....(ii)}$$

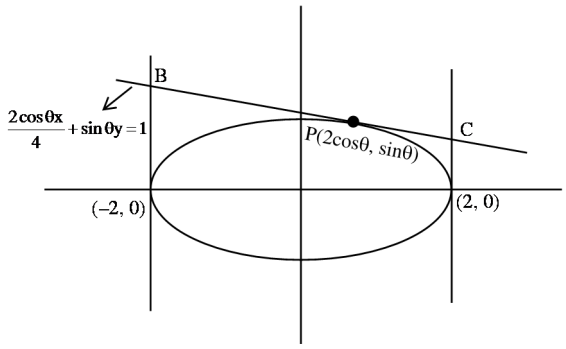
Solving (i) and (ii) we get

$$y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}, x = 1$$

$$\Rightarrow PQ^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{16}{3}$$

3. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

Equation of tangent is $(\cos\theta)x + 2\sin\theta y = 2$

$$B\left(-2, \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right), \qquad C\left(2, \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$B\left(-2, \cot\frac{\theta}{2}\right) \qquad C\left(2, \tan\frac{\theta}{2}\right)$$

Equation of circle is

$$(x+2)(x-2) + \left(y - \cot\frac{\theta}{2}\right)\left(y - \tan\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

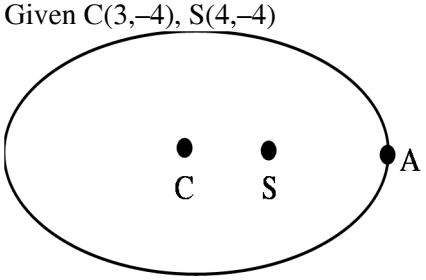
$$x^2 - 4 + y^2 - \left(\tan\frac{\theta}{2} + \cot\frac{\theta}{2}\right)y + 1 = 0$$

so, $\left(\sqrt{3}, 0\right)$ satisfying option (1)

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Ellipse

4. Official Ans. by NTA (3)

Sol. Given C(3,–4), S(4,–4)



and A(5,–4)

Hence, a = 2 & ae = 1

$\Rightarrow e = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow b^2 = 3.$

So, $E: \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+4)^2}{3} = 1$

Intersecting with given tangent.

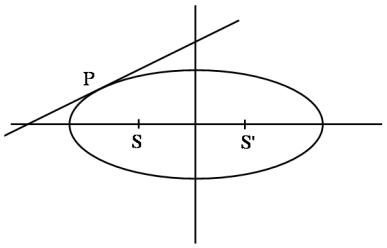
$\frac{x^2 - 6x + 9}{4} + \frac{m^2x^2}{3} = 1$

Now, D = 0 (as it is tangent)

So, $5m^2 = 3.$

5. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



Equation of tangent : y = 2x + 6

at P

$\therefore$ P(–8/3, 2/3)

$e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

S & S' = (–2, 0) & (2, 0)

Area of Δ SPS' = $\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{2}{3}$

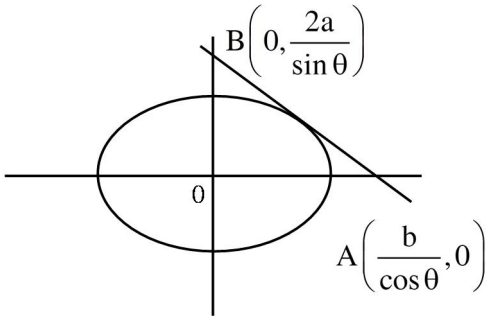
$A = \frac{4}{3}$

$\therefore (5 - e^2)A = (5 - \frac{1}{2})\frac{4}{3} = 6$

6. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Tangent

$\frac{x\cos\theta}{b} + \frac{y\sin\theta}{2a} = 1$



So, $\text{area}(\Delta OAB) = \frac{1}{2} \times \frac{b}{\cos\theta} \times \frac{2a}{\sin\theta}$

$= \frac{2ab}{\sin 2\theta} \geq 2ab$

$\Rightarrow k = 2$

7. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $12x\cos\theta + 5y\sin\theta = 60$

$\frac{x\cos\theta}{5} + \frac{y\sin\theta}{12} = 1$

is tangent to $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{144} = 1$

$144x^2 + 25y^2 = 3600$

8. Official Ans. by NTA (3)

Sol. General point on $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ is A(2cosθ, 3sinθ)

given B(–3, –5)

midpoint $C\left(\frac{2\cos\theta - 3}{2}, \frac{3\sin\theta - 5}{2}\right)$

$h = \frac{2\cos\theta - 3}{2};\ k = \frac{3\sin\theta - 5}{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{2h+3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2k+5}{3}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow 36x^2 + 16y^2 + 108x + 80y + 145 = 0$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Ellipse

9. Official Ans. by NTA (2)

Sol. The point of intersection of the curves $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ and $x^2+y^2=3$ in the first quadrant is $\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Now slope of tangent to the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$ at $\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ is

$m_1=-\frac{1}{3\sqrt{3}}$

And slope of tangent to the circle at $\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ is

$m_2=-\sqrt{3}$

So, if angle between both curves is θ then

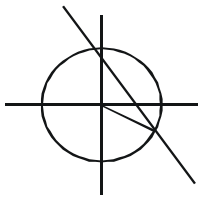
$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\sqrt{3}}{1+\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}\left(-\sqrt{3}\right)\right)}\right|$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Option (2)

10. Official Ans. by NTA (4)

Sol.



Homogenising

$x^2+2y^2-2\left(x+y\right)^2=0$

$\Rightarrow -x^2-4xy=0\Rightarrow x^2+4xy=0$

Lines are $x=0$ and $y=-\frac{x}{4}$

$\therefore$ Angle between lines $=\frac{\pi}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{4}$

option (4)

11. Official Ans. by NTA (3)

Sol. Given curves are $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

$x^2+y^2=\frac{31}{4}$

let slope of common tangent be m

so tangents are $y=mx\pm\sqrt{9m^2+4}$

$y=mx\pm\frac{\sqrt{31}}{2}\sqrt{1+m^2}$

hence $9m^2+4=\frac{31}{4}\left(1+m^2\right)$

$\Rightarrow 36m^2+16=31+31m^2\Rightarrow m^2=3$

12. Official Ans by NTA (1)

Sol. $y^2=3x^2$

and $x^2+y^2=4b$

Solve both we get

so $x^2=b$

$\frac{x^2}{16}+\frac{3x^2}{b^2}=1$

$\frac{b}{16}+\frac{3}{b}=1$

$b^2-16b+48=0$

$(b-12)(b-4)=0$

$b=12, b>4$

13. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Tangent to parabola

$2y=2(x+6)-20$

$\Rightarrow y=x-4$

Condition of tangency for ellipse.

$16=2(1)^2+b$

$\Rightarrow b=14$ **Option (2)**

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2021_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Ellipse

14. Official Ans. by NTA (3)

Sol. Equation of tangent be

$$\frac{x\cos\theta}{3\sqrt{3}}+\frac{y.\sin\theta}{1}=1, \qquad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

intercept on x-axis

OA = $3\sqrt{3}\sec\theta$

intercept on y-axis

OB = $\text{cosec}\theta$

Now, sum of intercept

$= 3\sqrt{3}\sec\theta + \text{cosec}\theta = f(\theta)$ let

$f'(\theta) = 3\sqrt{3}\sec\theta\tan\theta - \text{cosec}\theta\cot\theta$

$$=3\sqrt{3}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$=\underbrace{\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}.3\sqrt{3}}_{\oplus}\left[\tan^3\theta-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right]=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

$\Rightarrow$ at $\theta = \frac{\pi}{6}$, $f(\theta)$ is minimum