

**DIFFERENTIABILITY**

1. माना एक फलन  $g : [0, 4] \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$g(x) = \begin{cases} \max_{0 \leq t \leq x} \{t^3 - 6t^2 + 9t - 3\}, & 0 \leq x \leq 3 \\ 4 - x & , 3 < x \leq 4 \end{cases} \text{ द्वारा}$$

परिभाषित है, तो अन्तराल  $(0, 4)$  में जिन बिन्दुओं पर  $g(x)$  अवकलनीय नहीं है, उनकी संख्या है \_\_\_\_\_।

2. माना  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{(1 - \cos 2x)^2} \log_e \left( \frac{1 + 2xe^{-2x}}{(1 - xe^{-x})^2} \right), & x \neq 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। यदि  $x = 0$  पर  $f$  संतत है, तो  $\alpha$  बराबर है -

- (1) 1            (2) 3            (3) 0            (4) 2

3. माना फलन  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3 \left( 1 - \frac{|x|}{2} \right) & \text{यदि } |x| \leq 2 \text{ है} \\ 0 & \text{यदि } |x| > 2 \text{ है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। माना  $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$   $g(x) = f(x+2) - f(x-2)$  द्वारा परिभाषित है। यदि  $\mathbf{R}$  के उन बिन्दुओं की संख्या जहाँ  $g$  संतत नहीं है और जहाँ  $g$  अवकलनीय नहीं है, क्रमशः  $n$  और  $m$  है, तो  $n + m$  बराबर है \_\_\_\_\_।

4. मान  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  एक फलन है जिसके लिए  $f(2) = 4$

तथा  $f'(2) = 1$  है। तो  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(x)}{x - 2}$  का

मान बराबर है :

- (1) 4            (2) 8            (3) 16            (4) 12

5. माना  $f : [0, 3] \rightarrow \mathbf{R}$

$f(x) = \min \{x - [x], 1 + [x] - x\}$  जहाँ  $[x]$  महत्तम पूर्णांक  $\leq x$  है, द्वारा परिभाषित है। माना सभी  $x \in [0, 3]$ , जिनके लिए  $f$  असंतत है, का समुच्चय  $P$  है तथा सभी  $x \in (0, 3)$  जिनके लिए  $f$  अवकलनीय नहीं है का समुच्चय  $Q$  है। तो  $P$  तथा  $Q$  में अवयवों की संख्या का योगफल बराबर है \_\_\_\_\_।

6. माना फलन  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, 3]$ ,

$$f(x) = \begin{cases} \max \{ \sin t : 0 \leq t \leq x \}, & 0 \leq x \leq \pi \\ 2 + \cos x, & x > \pi \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। तो निम्न में से कौन सा सत्य है?

- (1)  $(0, \infty)$  के प्रत्येक बिंदु पर  $f$  संतत है परन्तु ठीक एक बिंदु पर अवकलनीय नहीं है  
 (2)  $(0, \infty)$  के प्रत्येक बिंदु पर  $f$  अवकलनीय है  
 (3)  $(0, \infty)$  के ठीक दो बिंदुओं पर  $f$  संतत नहीं है  
 (4)  $(0, \infty)$  के प्रत्येक बिंदु पर  $f$  संतत है परन्तु ठीक दो बिंदुओं पर अवकलनीय नहीं है

7. माना  $[t]$  महत्तम पूर्णांक  $\leq t$  है। माना  $f(x) = x - [x]$ ,  $g(x) = 1 - x + [x]$  तथा  $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ,  $x \in [-2, 2]$  है। तो  $h$ :

- (1)  $[-2, 2]$  में संतत है परन्तु  $(-2, 2)$  में चार बिन्दुओं से अधिक पर अवकलनीय नहीं है।  
 (2)  $[-2, 2]$  में ठीक तीन बिन्दुओं पर संतत नहीं है।  
 (3)  $[-2, 2]$  में संतत है परन्तु  $(-2, 2)$  में ठीक तीन बिन्दुओं से अधिक पर अवकलनीय नहीं है।  
 (4)  $[-2, 2]$  में ठीक चार बिन्दुओं पर संतत नहीं है।

8. फलन  $f(x) = |x^2 - 2x - 3| \cdot e^{9x^2 - 12x + 4}$  :

- (1) ठीक चार बिन्दुओं पर अवकलनीय नहीं है।  
 (2) ठीक तीन बिन्दुओं पर अवकलनीय नहीं है।  
 (3) ठीक दो बिन्दुओं पर अवकलनीय नहीं है।  
 (4) ठीक एक बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

9. उन बिंदुओं की संख्या, जिन पर फलन

$$f(x) = |2x + 1| - 3|x + 2| + |x^2 + x - 2|, x \in \mathbb{R}$$

अवकलनीय नहीं है, है \_\_\_\_\_।

10.  $[-3, 3]$  पर एक फलन  $f$  निम्न द्वारा परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} \min\{|x|, 2 - x^2\}, & -2 \leq x \leq 2 \\ [x], & 2 < |x| \leq 3 \end{cases}$$

जहाँ  $[x]$  महत्तम पूर्णांक  $\leq x$  है।  $(-3, 3)$  में उन बिन्दुओं की संख्या, जहाँ  $f$  अवकलनीय नहीं है, है \_\_\_\_\_.

11. माना फलन  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  तथा  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \text{ तथा } g(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 3x-2, & x \geq 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित हैं। तो  $\mathbb{R}$  में उन बिंदुओं की संख्या, जहाँ  $(f \circ g)(x)$  अवकलनीय नहीं है, है :

- (1) 3      (2) 1      (3) 0      (4) 2

12. यदि  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & ; |x| \geq 1 \\ ax^2 + b & ; |x| < 1 \end{cases}$

अपने प्रांत के प्रत्येक बिंदु पर अवकलनीय है, तो  $a$  तथा  $b$  के मान क्रमशः हैं:

- (1)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$       (2)  $\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$       (3)  $\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$       (4)  $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

13. माना  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , समीकरण  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

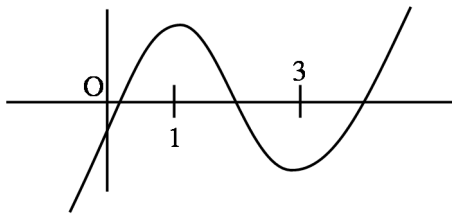
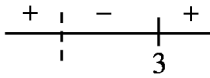
$\forall x, y \in \mathbb{R}$  को संतुष्ट करता है तथा किसी भी  $x \in \mathbb{R}$  के लिए  $f(x) \neq 0$  है। यदि फलन  $f$  बिंदु  $x = 0$  पर अवकलनीय है तथा  $f'(0) = 3$  हैं, तो

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(h) - 1) \text{ बराबर है } \underline{\hspace{2cm}} \text{।}$$

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (1)

Sol.  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$   
 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$   
 $f(1) = 1 \quad f(3) = -3$



$$g(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq 3 \\ -1 & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

$g(x)$  is continuous

$$g'(x) = \begin{cases} 3(x-1)(x-3) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & 1 \leq x \leq 3 \\ -1 & 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

$g(x)$  is non-differentiable at  $x = 3$

2. Official Ans. by NTA (1)

Sol. For continuity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{4 \sin^4 x} (\ln(1+2xe^{-2x}) - 2 \ln(1-xe^{-x}))$$

$= \alpha$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4x} [2xe^{-2x} + 2xe^{-x}] = \alpha$$

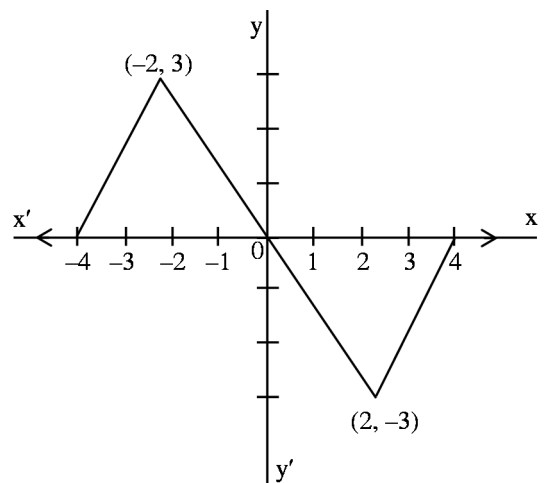
$$= \frac{1}{4}(4) = \alpha = 1$$

3. Official Ans. by NTA (4)

Sol.  $f(x-2) = \begin{cases} \frac{3x}{2} & -4 \leq x \leq -2 \\ -\frac{3x}{2} & -2 < x \leq 0 \\ 0 & x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty) \end{cases}$

$$f(x-2) = \begin{cases} \frac{3x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ -\frac{3x}{2} + 6 & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \end{cases}$$

$$g(x) = f(x+2) - f(x-2) = \begin{cases} \frac{3x}{2} + 6 & -4 \leq x \leq -2 \\ -\frac{3x}{2} & -2 < x < 2 \\ \frac{3x}{2} - 6 & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & x \in (-\infty, -4) \cup (4, \infty) \end{cases}$$



$n = 0$

$m = 4 \Rightarrow (n + m = 4)$

4. Official Ans. by NTA (4)

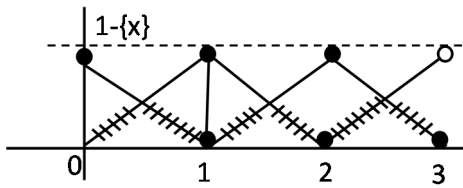
Sol. Apply L'Hopital Rule

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{2xf(2) - 4f'(x)}{1} \right)$$

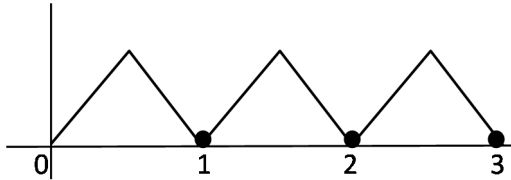
$$= \frac{4(4) - 4}{1} = 12$$

## 5. Official Ans. by NTA (5)

Sol.



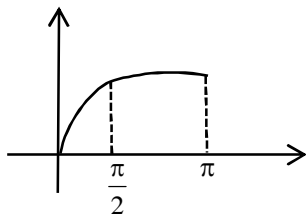
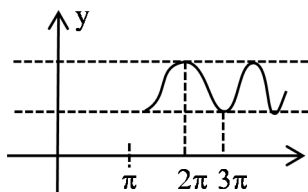
$$1 - \{x\} = 1 - x; 0 \leq x < 1$$



Non differentiable at

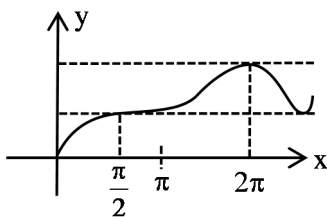
$$x = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$$

## 6. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Graph of  $\max\{\sin t : 0 \leq t \leq x\}$  in  $x \in [0, \pi]$ & graph of  $\cos$  for  $x \in [\pi, \infty)$ 

So graph of

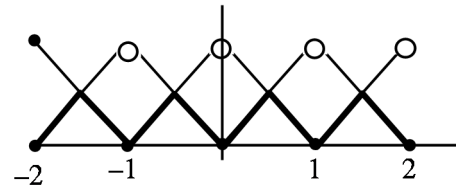
$$f(x) = \begin{cases} \max\{\sin t : 0 \leq t \leq x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 2 + \cos x & x > \pi \end{cases}$$

 $f(x)$  is differentiable everywhere in  $(0, \infty)$ 

## 7. Official Ans. by NTA (1)

Sol.  $\min\{x - [x], 1 - x + [x]\}$ 

$$h(x) = \min\{x - [x], 1 - [x - [x]]\}$$

 $\Rightarrow$  always continuous in  $[-2, 2]$ 

but non differentiable at 7 Points

## 8. Official Ans. by NTA (3)

Sol.  $f(x) = |(x-3)(x+1)| \cdot e^{(3x-2)^2}$ 

$$f(x) = \begin{cases} (x-3)(x+1) \cdot e^{(3x-2)^2} & ; x \in (3, \infty) \\ -(x-3)(x+1) \cdot e^{(3x-2)^2} & ; x \in [-1, 3] \\ (x-3) \cdot (x+1) \cdot e^{(3x-2)^2} & ; x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

Clearly, non-differentiable at  $x = -1$  &  $x = 3$ .

## 9. Official Ans. by NTA (2)

Sol.  $f(x) = |2x+1| - 3|x+2| + |x^2+x-2|$ 

$$= |2x+1| - 3|x+2| + |x+2||x-1|$$

$$= |2x+1| + |x+2|(|x-1| - 3)$$

Critical points are  $x = \frac{-1}{2}, -2, -1$ but  $x = -2$  is making a zero.

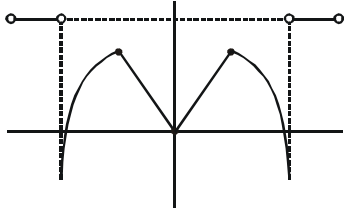
twice in product so, points of non

differentiability are  $x = \frac{-1}{2}$  and  $x = -1$  $\therefore$  Number of points of non-differentiability =  $\boxed{2}$

10. Official Ans. by NTA (5)

$$\text{Sol. } f(x) = \begin{cases} \min\{|x|, 2-x^2\} & , -2 \leq x \leq 2 \\ [|x|] & , 2 < |x| \leq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in [-3, -2) \cup (2, 3]$$



Number of points of non-differentiability in  $(-3, 3) = 5$

11. Official Ans. by NTA (2)

$$\text{Sol. } f(g(x)) = \begin{cases} g(x) + 2, & g(x) < 0 \\ (g(x))^2, & g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^3 + 2, & x < 0 \\ x^6, & x \in [0, 1) \\ (3x - 2)^2, & x \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$(f \circ g(x))' = \begin{cases} 3x^2, & x < 0 \\ 6x^5, & x \in (0, 1) \\ 2(3x - 2) \times 3, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

At '0'

L.H.L.  $\neq$  R.H.L. (Discontinuous)

At '1'

L.H.D. = 6 = R.H.D.

$\Rightarrow f \circ g(x)$  is differentiable for  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

12. Official Ans. by NTA (4)

$$\text{Sol. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1 \\ ax^2 + b, & |x| < 1 \end{cases}$$

at  $x = 1$  function must be continuous

$$\text{So, } 1 = a + b \quad \dots(1)$$

differentiability at  $x = 1$

$$\left(-\frac{1}{x^2}\right)_{x=1} = (2ax)_{x=1}$$

$$\Rightarrow -1 = 2a \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$(1) \Rightarrow b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

13. Official Ans. by NTA (3)

Sol. If  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$  &  $f'(0) = 3$  then

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

$$\Rightarrow f'(0) = \ln a = 3 \Rightarrow a = e^3$$

$$\Rightarrow f(x) = (e^3)^x = e^{3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 \right) = 1 \times 3 = 3$$