

CONTINUITY

1. माना एक फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - e^x & \text{यदि } x \leq 0 \text{ है} \\ a + [-x] & \text{यदि } 0 < x < 1 \text{ है} \\ 2x - b & \text{यदि } x \geq 1 \text{ है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है, जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक $\leq x$ है।

यदि फलन f, \mathbf{R} पर संतत है, तो $(a + b)$ बराबर है:

- (1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 5

2. माना $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda|x^2 - 5x + 6|}{\mu(5x - x^2 - 6)}, & x < 2 \\ \frac{\tan(x-2)}{e^{\frac{x-2}{x-1}}}, & x > 2 \\ \mu, & x = 2 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है, जबकि $[x]$ महत्तम पूर्णांक $\leq x$ है।

यदि $x = 2$ पर f संतत है, तो $\lambda + \mu$ बराबर है :

- (1) $e(-e + 1)$ (2) $e(e - 2)$
(3) 1 (4) $2e - 1$

3. माना $f: \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (1 + |\sin x|)^{\frac{3a}{|\sin x|}}, & -\frac{\pi}{4} < x < 0 \\ b, & x = 0 \\ e^{\cot 4x / \cot 2x}, & 0 < x < \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। यदि $x = 0$ पर f संतत है, तो

$6a + b^2$ का मान बराबर है :

- (1) $1 - e$ (2) $e - 1$ (3) $1 + e$ (4) e

4. माना $a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$ हैं। एक फलन

$$f(x) = \begin{cases} a \sin \frac{\pi}{2}(x-1), & \text{के लिए } x \leq 0 \\ \frac{\tan 2x - \sin 2x}{bx^3}, & \text{के लिए } x > 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। यदि $x = 0$ पर f संतत है, तो $10 - ab$ बराबर है _____।

5. यदि फलन $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \log_e \left(\frac{1 + \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{b}} \right), & x < 0 \\ k, & x = 0 \\ \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}, & x > 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर संतत है, तो $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{k}$ बराबर है:

- (1) -5 (2) 5 (3) -4 (4) 4

6. माना $[t]$ महत्तम पूर्णांक $\leq t$ है। जहाँ फलन

$$f(x) = [x]x^2 - 1 + \sin\left(\frac{\pi}{[x]+3}\right) - [x+1], x \in (-2, 2)$$

संतत नहीं है, ऐसे बिन्दुओं की संख्या है _____।

7. एक फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = [x-1] \cos\left(\frac{2x-1}{2}\right)\pi$

द्वारा परिभाषित है, जबकि $[.]$ महत्तम पूर्णांक फलन है, तो f :

- (1) x के सभी पूर्णांक मानों, $x = 1$ के अतिरिक्त, पर असंतत है
(2) केवल $x = 1$ पर संतत है
(3) प्रत्येक वास्तविक x के लिए संतत है
(4) केवल $x = 1$ पर असंतत है

8. माना $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ है, जो

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin\left(-\frac{\pi x}{2}\right), & \text{यदि } x < -1 \\ |ax^2 + x + b|, & \text{यदि } -1 \leq x \leq 1 \\ \sin(\pi x), & \text{तो } x > 1 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। यदि $f(x), \mathbf{R}$ पर सतत् है, तो $a + b$ का मान है :

- (1) -3 (2) -1 (3) 3 (4) 1

9. माना $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ तथा $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x+a, & x < 0 \\ |x-1|, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{तथा } g(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ (x-1)^2 + b, & x \geq 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है, जहाँ a, b ऋणेत्तर वास्तविक संख्यायें हैं। यदि $(g \circ f)(x)$ सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए संतत है, तो $a+b$ बराबर है _____।

10. यदि फलन $f(x) = \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$, अपने प्रांत

के प्रत्येक बिन्दु पर संतत है तथा $f(0) = \frac{1}{k}$, है, तो

k बराबर है _____।

11. माना फलन $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ निम्न द्वारा परिभाषित है:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(a+1)x + \sin 2x}{2x}, & \text{यदि } x < 0 \text{ है} \\ b, & \text{यदि } x = 0 \text{ है} \\ \frac{\sqrt{x+bx^3} - \sqrt{x}}{bx^{5/2}}, & \text{यदि } x > 0 \text{ है} \end{cases}$$

यदि $x=0$ पर f संतत है, तो $a+b$ का मान बराबर है:

- (1) $-\frac{5}{2}$ (2) -2 (3) -3 (4) $-\frac{3}{2}$

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Continuous at $x = 0$

$$f(0^+) = f(0^-) \Rightarrow a - 1 = 0 - e^0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

Continuous at $x = 1$

$$f(1^+) = f(1^-)$$

$$\Rightarrow 2(1) - b = a + (-1)$$

$$\Rightarrow b = 2 - a + 1 \Rightarrow b = 3$$

$$\therefore a + b = 3$$

2. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{\tan(x-2)}{x-2}} = e^1$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-\lambda(x-2)(x-3)}{\mu(x-2)(x-3)} = -\frac{\lambda}{\mu}$$

For continuity $\mu = e = -\frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \mu = e, \lambda = -e^2$

$$\lambda + \mu = e(-e + 1)$$

3. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = b$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{\frac{\cot 4x}{\cot 2x}} = e^{\frac{1}{2}} = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + |\sin x|)^{\frac{3a}{|\sin x|}} = e^{3a} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + |\sin x|)^{\frac{3a}{|\sin x|}} = e^{3a} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$a = \frac{1}{6} \Rightarrow 6a = 1$$

$$(6a + b^2) = (1 + e)$$

4. Official Ans. by NTA (14)

Sol. $f(x) = \begin{cases} a \sin \frac{\pi}{2}(x-1), & x \leq 0 \\ \frac{\tan 2x - \sin 2x}{bx^3}, & x > 0 \end{cases}$

For continuity at '0'

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan 2x - \sin 2x}{bx^3} = -a$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{8x^3}{3} + \frac{8x^3}{3!}}{bx^3} = -a$$

$$\Rightarrow 8\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3!}\right) = -ab$$

$$\Rightarrow 4 = -ab$$

$$\Rightarrow 10 - ab = 14$$

5. Official Ans. by NTA (1)

Sol. If $f(x)$ is continuous at $x = 0$, RHL = LHL = $f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$$

(Rationalisation)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{2\sin^2 x}{x^2} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \ln \left(\frac{1 + \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{b}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln \left(1 + \frac{x}{a} \right)}{\left(\frac{x}{a} \right) \cdot a} + \frac{\ln \left(1 - \frac{x}{b} \right)}{\left(-\frac{x}{b} \right) \cdot b}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

So $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -4 = k$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{k} = -4 - 1 = -5$$

6. Official Ans. by NTA (2)

$$\text{Sol. } f(x) = [x] |x^2 - 1| + \sin \frac{\pi}{[x+3]} - [x+1]$$

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x^2, & -2 < x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 1, & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

discontinuous at $x = 0, 1$

7. Official Ans. by NTA (3)

Sol. For $x = n, n \in \mathbb{Z}$

$$\text{LHL} = \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^-} [x-1] \cos \left(\frac{2x-1}{2} \right) \pi$$

$$= 0$$

$$\text{RHL} = \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow n^+} [x-1] \cos \left(\frac{2x-1}{2} \right) \pi$$

$$= 0$$

$$f(n) = 0$$

$$\Rightarrow \text{LHL} = \text{RHL} = f(n)$$

$\Rightarrow f(x)$ is continuous for every real x .

8. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $f(x)$ is continuous on \mathbb{R}

$$\Rightarrow f(1^-) = f(1) = f(1^+)$$

$$|a+1+b| = \lim_{x \rightarrow 1} \sin(\pi x)$$

$$|a+1+b| = 0 \Rightarrow a+b = -1 \quad \dots(1)$$

$$\Rightarrow \text{Also } f(-1^-) = f(-1) = f(-1^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2 \sin \left(\frac{-\pi x}{2} \right) = |a-1+b|$$

$$|a-1+b| = 2$$

$$\text{Either } a-1+b = 2 \text{ or } a-1+b = -2$$

$$a+b = 3 \quad \dots(2) \quad \text{or } a+b = -1 \quad \dots(3)$$

$$\text{from (1) and (2)} \Rightarrow a+b = 3 = -1 \text{ (reject)}$$

$$\text{from (1) and (3)} \Rightarrow a+b = -1$$

9. Official Ans. by NTA (1)

$$\text{Sol. } g[f(x)] = \begin{cases} f(x)+1 & f(x) < 0 \\ (f(x)-1)^2 + b & f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$g[f(x)] = \begin{cases} x+a+1 & x+a < 0 \text{ \& } x < 0 \\ |x-1|+1 & |x-1| < 0 \text{ \& } x \geq 0 \\ (x+a-1)^2 + b & x+a \geq 0 \text{ \& } x < 0 \\ (|x-1|-1)^2 + b & |x-1| \geq 0 \text{ \& } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g[f(x)] = \begin{cases} x+a+1 & x \in (-\infty, -a) \text{ \& } x \in (-\infty, 0) \\ |x-1|+1 & x \in \phi \\ (x+a-1)^2 + b & x \in [-a, \infty) \text{ \& } x \in (-\infty, 0) \\ (|x-1|-1)^2 + b & x \in \mathbb{R} \text{ \& } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

$$g[f(x)] = \begin{cases} x+a+1 & x \in (-\infty, -a) \\ (x+a-1)^2 + b & x \in [-a, 0) \\ (|x-1|-1)^2 + b & x \in [0, \infty) \end{cases}$$

$g(f(x))$ is continuous

$$\text{at } x = -a \quad \& \quad \text{at } x = 0$$

$$1 = b+1 \quad \& \quad (a-1)^2 + b = b$$

$$b = 0 \quad \& \quad a = 1$$

$$\Rightarrow a+b = 1$$

10. Official Ans. by NTA (6)

$$\text{Sol. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} = f(0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \left(\frac{\sin x + x}{2} \right) \sin \left(\frac{x - \sin x}{2} \right)}{x^4} = \frac{1}{K}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x + x}{2x} \right) \left(\frac{x - \sin x}{2x^3} \right) = \frac{1}{K}$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{(1+1)}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{K}$$

$$\Rightarrow K = 6$$

11. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $f(x)$ is continuous at $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \dots(1)$$

$$f(0) = b \quad \dots(2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin(a+1)x}{2x} + \frac{\sin 2x}{2x} \right) \\ &= \frac{a+1}{2} + 1 \quad \dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+bx^3} - \sqrt{x}}{bx^{5/2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+bx^3-x)}{bx^{5/2}(\sqrt{x+bx^3} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{1+bx^2} + 1)} = \frac{1}{2} \quad \dots(4) \end{aligned}$$

Use (2), (3) & (4) in (1)

$$\frac{1}{2} = b = \frac{a+1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2}, a = -2$$

$$a + b = \frac{-3}{2}$$