AREA UNDER THE CURVE

1. माना दीर्घवत्त $E : x^2 + 4y^2 = 5$ के बिन्दु P(1, 1) पर स्पर्श रेखा T है। यदि स्पर्श रेखा T, दीर्घवत्त E तथा रेखाओं $x = 1$ और $x = \sqrt{5}$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $\alpha\sqrt{5} + \beta + \gamma \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ है, तो $|\alpha+\beta+\gamma|$ बराबर है __________ ।

2. ऊपरी आधे निर्देशांक तल में वक्रों, $x^2 + 2y - 1 = 0$, $y^2 + 4x - 4 = 0$ तथा $y^2 - 4x - 4 = 0$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) बराबर है _______ ।

3. क्षेत्र $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid x \geq 0, 2x^2 \leq y \leq 4 - 2x\}$ का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) बराबर है :

(1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{17}{3}$ (3) $\frac{13}{3}$ (4) $\frac{7}{3}$

4. यदि परिबद्धित क्षेत्र

$$R = \left\{(x,y) : \max\{0, \log_e x\} \leq y \leq 2^x, \frac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$$

का क्षेत्रफल $\alpha(\log_e 2)^{-1} + \beta(\log_e 2) + \gamma$ है, तो $(\alpha+\beta-2\gamma)^2$ का मान बराबर है :

(1) 8 (2) 2 (3) 4 (4) 1

5. $y - x = 2$ तथा $x^2 = y$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है :

(1) $\frac{16}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{9}{2}$ (4) $\frac{4}{3}$

6. क्षेत्र $S = \{(x, y) : 3x^2 \leq 4y \leq 6x + 24\}$ का क्षेत्रफल है ___________ ।

7. माना फलन $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ के स्थानीय उच्चतम तथा स्थानीय निम्नतम बिन्दु क्रमशः a तथा b है। यदि $y = f(x)$, x-अक्ष, तथा रेखाओं $x = a$ और $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल A है, तो 4A बराबर है ________.

8. परवलय $(y - 2)^2 = (x - 1)$, इसके उस बिंदू जिसकी कोटि 3 है पर स्पर्श रेखा तथा x-अक्ष द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(1) 9 (2) 10 (3) 4 (4) 6

9. यदि रेखाओं $x = 0, y = 0, x=\frac{3}{2}$ तथा वक्र $y = 1 + 4x - x^2$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल को रेखा $y = mx$ समद्विभाजित करती है, तो 12 m बराबर है_______ ।

10. वक्रों $y = \sin x + \cos x$ एवं $y = |\cos x - \sin x|$ तथा रेखाओं $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(1) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$ (2) $2(\sqrt{2}+1)$

(3) $4(\sqrt{2}-1)$ (4) $2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$

11. क्षेत्र $R = \{(x, y) : 5x^2 \leq y \leq 2x^2 + 9\}$ का क्षेत्रफल है :

(1) $11\sqrt{3}$ वर्ग इकाई (2) $12\sqrt{3}$ वर्ग इकाई

(3) $9\sqrt{3}$ वर्ग इकाई (4) $6\sqrt{3}$ वर्ग इकाई

12. वत्त, $x^2 + y^2 = 36$ के उस भाग का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में), जो परवलय $y^2 = 9x$ के बाहर है, है:

(1) $24\pi + 3\sqrt{3}$ (2) $12\pi - 3\sqrt{3}$

(3) $24\pi - 3\sqrt{3}$ (4) $12\pi + 3\sqrt{3}$

13. साइन तथा कोसाइन फलनों के ग्राफ एक दूसरे को बहुत से बिन्दुओं पर काटते हैं, तथा इनके दो क्रमागत प्रतिच्छेदन बिन्दुओं के बीच में ये दो ग्राफ एक समान क्षेत्रफल A घेरते हैं। तो A^4 बराबर है____ ।

14. माना वक्रों $y = \sin x, y = \cos x$ तथा y -अक्ष द्वारा प्रथम चतुर्थांश में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल A_1 है और माना वक्रों $y = \sin x$, $y = \cos x$, x-अक्ष तथा $x = \frac{\pi}{2}$ द्वारा प्रथम चतुर्थांश में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल A_2 है। तो

(1) $A_1 : A_2 = 1 : \sqrt{2}$ तथा $A_1 + A_2 = 1$ हैं

(2) $A_1 = A_2$ तथा $A_1 + A_2 = \sqrt{2}$ हैं

(3) $2A_1 = A_2$ तथा $A_1 + A_2 = 1 + \sqrt{2}$ हैं

(4) $A_1 : A_2 = 1 : 2$ तथा $A_1 + A_2 = 1$ है

15. रेखाओं $y = ||x - 1| - 2|$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है ________ ।

16. माना अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 2(x+1)$ का हल वक्र $y = y(x)$ है। यदि वक्र $y = y(x)$ तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल का संख्यात्मक मान $\frac{4\sqrt{8}}{3}$ है, तो $y(1)$ का मान बराबर है _______ ।

17. माना $f : [-3, 1] \rightarrow R$,

$$f(x) = \begin{cases} \min\{(x+6), x^2\}, & -3 \le x \le 0 \\ \max\{\sqrt{x}, x^2\}, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

द्वारा दिया गया है। यदि $y = f(x)$ तथा x-अक्ष द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल A है, तो 6A बराबर है ______ ।

18. वक्र $4y^2 = x^2 (4 - x)(x - 2)$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है :

(1) $\frac{\pi}{8}$

(2) $\frac{3\pi}{8}$

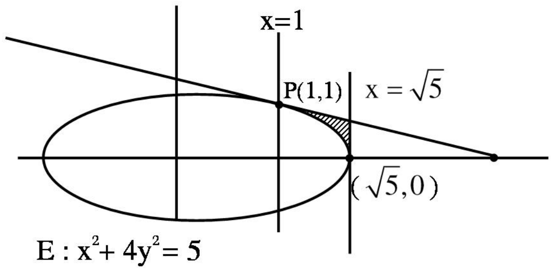
(3) $\frac{3\pi}{2}$

(4) $\frac{\pi}{16}$

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



Tangent at P : x + 4y = 5

Required Area

$$= \int_1^{\sqrt{5}} \left(\frac{5-x}{4} - \frac{\sqrt{5-x^2}}{2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{5x}{4} - \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4}\sqrt{5-x^2} - \frac{5}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}} \right]_1^{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt{5} - \frac{5}{4} - \frac{5}{4}\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

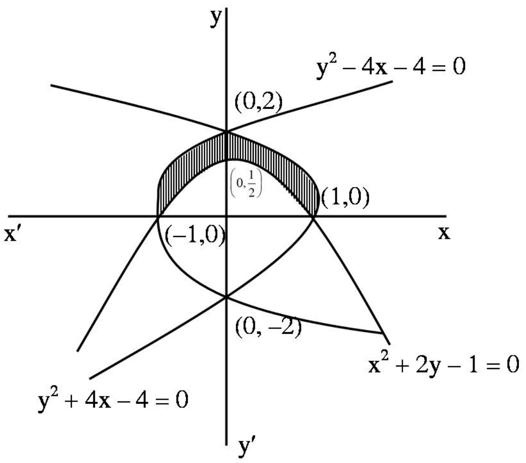
It we assume $\alpha, \beta, \gamma, \in Q$ (Not given in question)

then $\alpha = \frac{5}{4}, \beta = -\frac{5}{4}$ & $\gamma = -\frac{5}{4}$

$|\alpha + \beta + \gamma| = 1.25$

2. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



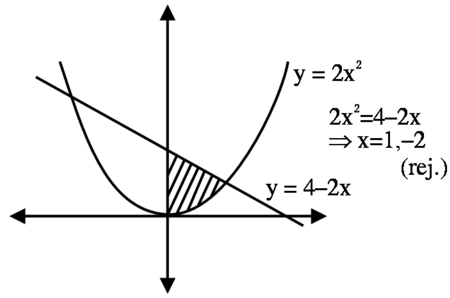
Required Area (shaded)

$$= 2\left[\int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{4}\right)dy - \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{2}\right)dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right] = (2)$$

3. Official Ans. by NTA (4)

Sol.

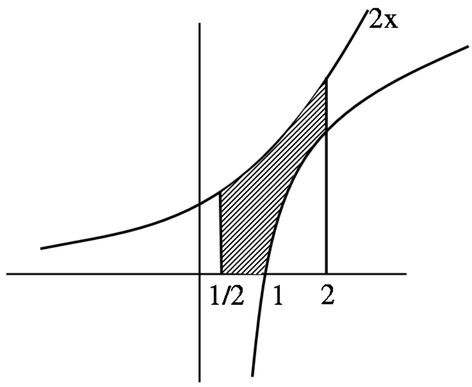


Required area = $\int_0^1 \left(4 - 2x - 2x^2\right)dx = 4x - x^2 - \frac{2x^3}{3}\Big|_0^1$

$= 4 - 1 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$

4. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $R = \left\{(x, y) : \max\left(0, \log_e x\right) \le y \le 2^x, \frac{1}{2} \le x \le 2\right\}$



$$\int_{\frac{1}{2}}^{2} 2^x\,dx - \int_1^2 \ell nx\,dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{1/2}^{2} - [x\ln x - x]_1^2$$

$$\Rightarrow \frac{(2^2) - 2^{1/2}}{\log_e 2} - (2\ln 2 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{\left(2^2 - \sqrt{2}\right)}{\log_e 2} - 2\ln 2 + 1$$

$\therefore\ \alpha = 2^2 - \sqrt{2},\ \beta = -2,\ \gamma = 1$

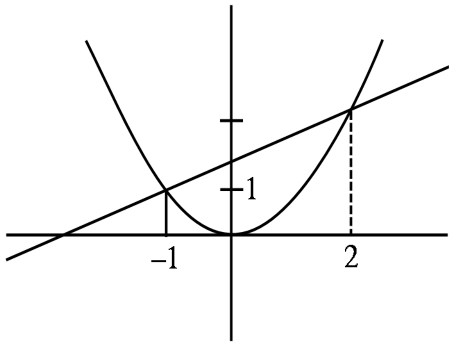
$\Rightarrow (\alpha + \beta + 2\gamma)^2$

$\Rightarrow (2^2 - \sqrt{2} - 2 - 2)^2$

$\Rightarrow (\sqrt{2})^2 = 2$

5. Official Ans. by NTA (3)

Sol.



$y - x = 2$, $x^2 = y$

Now, $x^2 = 2 + x$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$

$$\text{Area} = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)$$

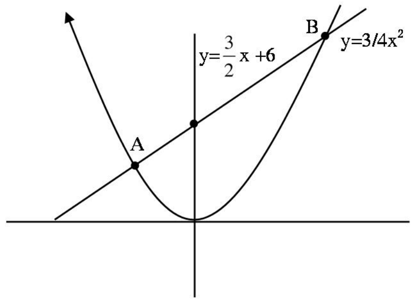
$$= \left| 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{2}$$

$$= \left(4 + 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 6 - 3 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

6. Official Ans. by NTA (27)

Sol.



For A & B

$3x^2 = 6x + 24 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x = -2, 4$

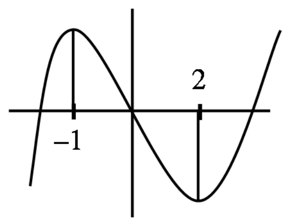
$$\text{Area} = \int_{-2}^{4} \left(\frac{3}{2}x + 6 - \frac{3}{4}x^2\right) dx$$

$$= \left[\frac{3x^2}{4} + 6x - \frac{x^3}{4}\right]_{-2}^{4} = 27$$

7. Official Ans. by NTA (114)

Sol. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1)$

Point = (2,–20) & (–1,7)



$$A = \int_{-1}^{0} (2x^3 - 3x^2 - 12x)\, dx + \int_{0}^{2} (12x + 3x^2 - 2x^3)\, dx$$

$$A = \left(\frac{x^4}{2} - x^3 - 6x^2\right)_{-1}^{0} + \left(6x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2}\right)_{0}^{2}$$

$4A = 114$

8. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $y = 3 \Rightarrow x = 2$

Point is (2,3)

Diff. w.r.t x

$2(y - 2)y' = 1$

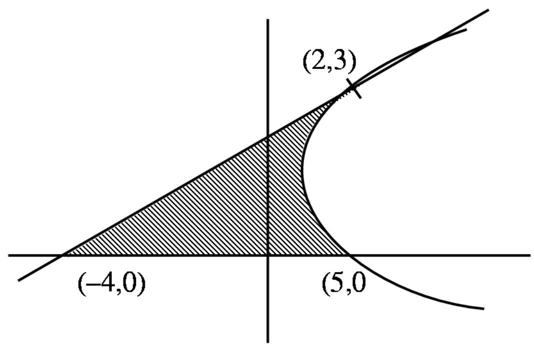
$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2(y-2)}$$

$$\Rightarrow y'_{(2,3)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y-3}{x-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x - 2y + 4 = 0$$

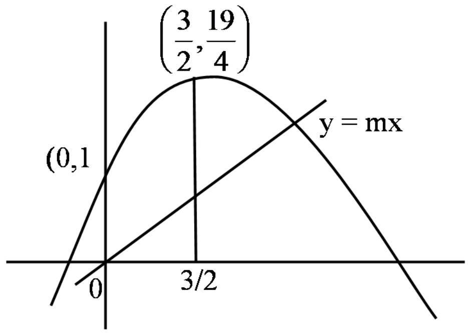
$$\text{Area} = \int_{0}^{3} \left((y-2)^2 + 1 - (2y-4)\right) dy$$

= 9 sq. units



9. Official Ans. by NTA (26)

Sol.



Total area = $\int_0^{3/2}(1+4x-x^2)\,dx$

$= x+2x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^{3/2} = \frac{39}{8}$

& $\frac{39}{16}=\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{2}m$

$\Rightarrow 3m=\frac{13}{2} \Rightarrow 12m=26$

10. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $A=\int_0^{\pi/2}\left((\sin x+\cos x)-|\cos x-\sin x|\right)dx$

$A=\int_0^{\pi/2}\left((\sin x+\cos x)-(\cos x-\sin x)\right)dx$

$+\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left((\sin x+\cos x)-(\sin x-\cos x)\right)dx$

$A=2\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx+2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cos x\,dx$

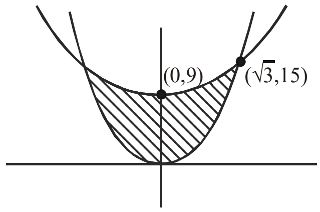
$A=-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)+2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$A=4-2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$

Option (1)

11. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



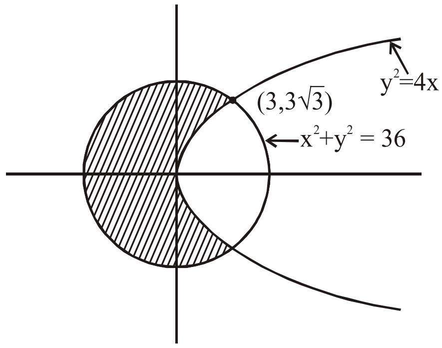
Required area = $2\int_0^{\sqrt{3}}(2x^2+9-5x^2)\,dx$

$= 2\left[9x-x^3\right]_0^{\sqrt{3}}$

$=2\left[9\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right] = 12\sqrt{3}$

12. Official Ans. by NTA (3)

Sol.



Required area

$= \pi\times(6)^2-2\int_0^3\sqrt{9}x\,dx-\int_3^6\sqrt{36-x^2}\,dx$

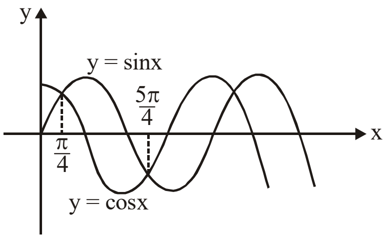
$=36\pi-12\sqrt{3}-2\left(\frac{x}{2}\sqrt{36-x^2}+18\sin^{-1}\frac{x}{6}\right)_3^6$

$=36\pi-12\sqrt{3}-2\left(9\pi-3\pi-\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$

$=24\pi-3\sqrt{3}$

13. Official Ans. by NTA (64)

Sol.



$$A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\, dx$$

$$= (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4}$$

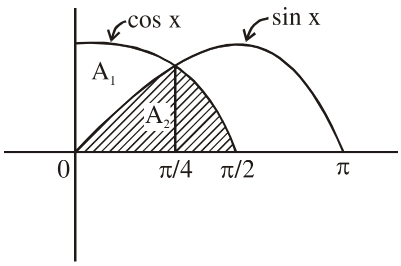
$$= \left(-\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) - \left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A^4 = \left(2\sqrt{2}\right)^4 = 16 \times 4 = 64$$

14. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



$$A_1 = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\, dx$$

$$A_1 = (\sin x + \cos x)_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$

$$A_2 = \int_0^{\pi/4} \sin x\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x\, dx$$

$$= (-\cos x)_0^{\pi/4} + (\sin x)_{\pi/4}^{\pi/2}$$

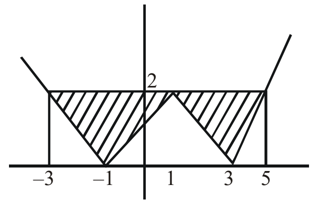
$$A_2 = \sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

$$A_1 : A_2 = 1 : \sqrt{2},\ A_1 + A_2 = 1$$

15. Official Ans. by NTA (BONUS)

Sol. Remark :

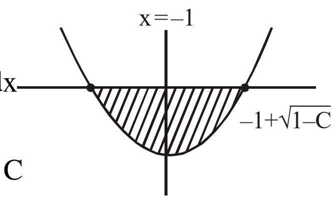
Question is incomplete it should be area bounded by $y = |x - 1| - 2|$ and $y = 2$



$$\text{Area } = 2\left(\frac{1}{2}.4.2\right)$$

16. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $\frac{dy}{dx} = 2(x+1)$



$$\Rightarrow \int dy = \int 2(x+1)dx$$

$$\Rightarrow y(x) = x^2 + 2x + C$$

$$\text{Area} = \frac{4\sqrt{8}}{3}$$

$$-1 + \sqrt{1-C}$$

$$\Rightarrow 2\int_{-1}^{-1+\sqrt{1-C}} (-(x+1)^2 - C + 1)dx = \frac{4\sqrt{8}}{3}$$

$$\Rightarrow 2\left[-\frac{(x+1)^3}{3} - Cx + x\right]_{-1}^{-1+\sqrt{1-C}} = \frac{4\sqrt{8}}{3}$$

$$\Rightarrow -(\sqrt{1-C})^3 + 3c - 3C\sqrt{1-C}$$

$$-3 + 3\sqrt{1-C} - 3C + 3 = 2\sqrt{8}$$

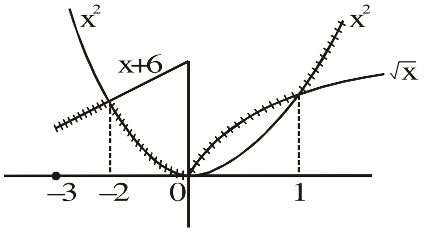
$$\Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 2x - 1,\ f(1) = 2$$

17. Official Ans. by NTA (41)

Sol. $f : [-3, 1] \to R$

$$f(x) = \begin{cases} \min\{(x+6), x^2\} & , \ -3 \le x \le 0 \\ \max\{\sqrt{x}, x^2\} & , \ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



area bounded by y = f(x) and x-axis

$$= \int_{-3}^{-2} (x+6)dx + \int_{-2}^{0} x^2 dx + \int_{0}^{1} \sqrt{x}\, dx$$

$A = \frac{41}{6}$

$6A = 41$

18. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $4y^2 = x^2(4-x)(x-2)$

$$|y| = \frac{|x|}{2}\sqrt{(4-x)(x-2)}$$

$$\Rightarrow \ y_1 = \frac{x}{2}\sqrt{(4-x)(x-2)}$$

$$\text{and } \ y_2 = \frac{-x}{2}\sqrt{(4-x)(x-2)}$$

$D : x \in [2, 4]$

Required Area

$$= \int_2^4 (y_1 - y_2)\, dx = \int_2^4 x\sqrt{(4-x)(x-2)}\, dx \quad ...(1)$$

$$\text{Applying } \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$$

$$\text{Area} = \int_2^4 (6-x)\sqrt{(4-x)(x-2)}\, dx \quad ...(2)$$

(1) + (2)

$$2A = 6\int_2^4 \sqrt{(4-x)(x-2)}\ dx$$

$$A = 3\int_2^4 \sqrt{1-(x-3)^2}\ dx$$

$$A = 3.\frac{\pi}{2}.1^2 = \frac{3\pi}{2}$$