AOD (TANGENT & NORMAL)

1. वक्रों $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ तथा $x^2+y^2=ab$, a > b, का एक प्रतिच्छेदन कोण है :

(1) $\tan^{-1}\left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$ (2) $\tan^{-1}\left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)$

(3) $\tan^{-1}\left(\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)$ (4) $\tan^{-1}\left(2\sqrt{ab}\right)$

2. यदि वक्र $y = ax^2 + bx + c$, $x \in R$, बिन्दु (1, 2) से होकर जाता है तथा मूल बिन्दु पर इसकी स्पर्श रेखा, $y = x$ है, तो a, b, c के संभावित मान है :

(1) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$

(2) a = 1, b = 0, c= 1

(3) a = 1, b = 1, c = 0

(4) a = –1, b = 1, c = 1

3. यदि वक्र $y = x^3$ के बिन्दु $P(t, t^3)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा वक्र को फिर से बिन्दु Q पर मिलती है, तो उस बिन्दु की कोटि जो रेखा–खण्ड PQ को आंतरिक अनुपात 1 : 2 में काटता है, है:

(1) $-2t^3$ (2) 0 (3) $-t^3$ (4) $2t^3$

4. यदि वक्र $x = y^4$ तथा $xy = k$ एक दुसरे को समकोण पर काटते हैं, तो $(4k)^6$ बराबर है ______.

5. यदि वक्र $y(x)=\int_0^x (2t^2-15t+10)\,dt$ के बिंदु (a,b), a > 1, पर अभिलम्ब, रेखा x + 3y = –5 के समान्तर है, तो |a + 6b| का मान बराबर है ________ ।

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $x^2 + y^2 = ab$

$\frac{2x_1}{a^2}+\frac{2y_1y'}{b^2}=0$

$\Rightarrow y_1'=\frac{-x_1}{a^2}\frac{b^2}{y_1}$ …(1)

$\therefore 2x_1 + 2y_1y' = 0$

$\Rightarrow y_2'=\frac{-x_1}{y_1}$ …(2)

Here (x_1y_1) is point of intersection of both curves

$\therefore x_1^2=\frac{a^2b}{a+b}$, $y_1^2=\frac{ab^2}{a+b}$

$\therefore \tan\theta=\left|\frac{y_1'-y_2'}{1+y_1'y_2'}\right|=\left|\frac{\frac{-x_1b^2}{a^2y_1}+\frac{x_1}{y_1}}{1+\frac{x_1^2b^2}{a^2y_1^2}}\right|$

$\tan\theta=\left|\frac{-b^2x_1y_1+a^2x_1y_1}{a^2y_1^2+b^2x_1^2}\right|$

$\tan\theta=\left|\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\right|$

2. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $a + b + c = 2$ ...(1)

and $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,0)}=1$

$2ax+b\big|_{(0,0)}=1$

$b = 1$

Curve passes through origin

So, $c = 0$

and $a = 1$

3. Official Ans. by NTA (1)

Sol. Slope of tangent at $P(t, t^3)$ = $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(t,t^3)}$

$= (3x^2)_{x=t} = 3t^2$

So equation tangent at $P(t, t^3)$:

$y - t^3 = 3t^2(x - t)$

for point of intersection with $y = x^3$

$x^3 - t^3 = 3t^2x - 3t^3$

$\Rightarrow (x - t)(x^2 + xt + t^2) = 3t^2(x - t)$

for $x \neq t$

$x^2 + xt + t^2 = 3t^2$

$\Rightarrow x^2 + xt - 2t^2 = 0 \Rightarrow (x - t)(x + 2t) = 0$

So for Q : $x = -2t$, $Q(-2t, -8t^3)$

ordinate of required point : $\frac{2t^3-8t^3}{2+1}=-2t^3$

4. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $x = y^4$ $xy = k$

for intersection $y^5 = k$ ...(1)

Also $x = y^4$

$\Rightarrow 1=4y^3\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y^3}$

for $xy = k \Rightarrow x=\frac{k}{y}$

$\Rightarrow 1=-\frac{k}{y^2}.\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-y^2}{k}$

$\because$ Curve cut orthogonally

$\Rightarrow \frac{1}{4y^3}\times\left(\frac{-y^2}{k}\right)=-1$

$\Rightarrow y=\frac{1}{4k}$

$\therefore$ from (1) $y^5 = k$

$\Rightarrow \frac{1}{(4k)^5}=k$

$\Rightarrow 4 = (4k)^6$

5. Official Ans. by NTA (406)

Sol. $y(x)=\int_0^x (2t^2-15t+10)dt$

$y'(x)\big]_{x=a}=\left[2x^2-15x+10\right]_a=2a^2-15a+10$

Slope of normal $=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow\quad 2a^2-15a+10=3\Rightarrow a=7$

& $\quad a=\frac{1}{2}$ (rejected)

$b=y(7)=\int_0^7 (2t^2-15t+10)dt$

$=\left[\frac{2t^3}{3}-\frac{15t^2}{2}+10t\right]_0^7$

$\Rightarrow\quad 6b=4\times 7^3-45\times 49+60\times 7$

$|a+6b|=406$