AOD (MAXIMA & MINIMA)

1. माना A = $[a_{ij}]$ एक 3×3 का आव्यूह है, जहाँ

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ यदि } i = j \text{ है} \\ -x & , \text{ यदि } |i-j| = 1 \text{ है} \\ 2x+1 & , \text{ अन्यथा,} \end{cases}$$

माना एक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \det(A)$ द्वारा परिभाषित है। तो **R** पर f के अधिकतम तथा निम्नतम मानों का योगफल बराबर है :

(1) $-\frac{20}{27}$ (2) $\frac{88}{27}$ (3) $\frac{20}{27}$ (4) $-\frac{88}{27}$

2. मान 'a' एक वास्तविक संख्या है जिसके लिए फलन $f(x) = ax^2 + 6x - 15$, $x \in \mathbf{R}$, अन्तराल $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ में वर्धमान तथा अन्तराल $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ में ह्यासमान है, तो फलन $g(x) = ax^2 - 6x + 15$, $x \in \mathbf{R}$ का :

(1) $x = -\frac{3}{4}$ पर स्थानीय अधिकतम है

(2) $x = -\frac{3}{4}$ पर स्थानीय निम्नतम है

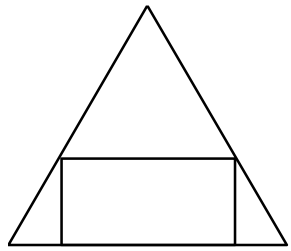
(3) $x = \frac{3}{4}$ पर स्थानीय अधिकतम है

(4) $x = \frac{3}{4}$ पर स्थानीय निम्नतम है

3. एक फलन $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{3f''(2)}{2}x + f''(1)$ द्वारा परिभाषित है तथा वह दो बार अवकलनीय है। इसके सभी स्थानीय न्यूनतम मानों का योग है:

(1) –22 (2) 5 (3) –27 (4) 0

4. एक आयत, $2\sqrt{2}$ भुजा के एक समबाहु त्रिभुज के चित्रानुसार अंतर्गत है, तो ऐसे एक आयत के अधिकतम क्षेत्रफल का वर्ग है ________ ।



5. 36 मी. की एक तार को दो भागों में काटा गया है। एक भाग को मोड़कर एक वर्ग बनाया गया है तथा दूसरे भाग को मोड़कर एक वत बनाया गया है। यदि दोनों आकतियों के क्षेत्रफल का योग निम्नतम है तथा वत्त की परिधि k है, तो $\left(\frac{4}{\pi}+1\right)k$ बराबर है ________ ।

6. फलन $f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{x^2}$, $x > 0$ का स्थानीय अधिकतम मान है –

(1) $(2\sqrt{e})^{\frac{1}{e}}$ (2) $\left(\frac{4}{\sqrt{e}}\right)^{\frac{e}{4}}$

(3) $(e)^{\frac{2}{e}}$ (4) 1

7. 20 m लंबाई की एक तार को दो भागों में काटा जाता है। एक भाग से एक वर्ग बनाना है तथा दूसरे भाग से एक सम षड्भुज बनाना है। तो दोनों वर्ग तथा षड्भुज के कुल क्षेत्रफल के न्यूनतम होने के लिए षड्भुज की भुजा की लंबाई (मीटर में) है:

(1) $\frac{5}{2+\sqrt{3}}$ (2) $\frac{10}{2+3\sqrt{3}}$

(3) $\frac{5}{3+\sqrt{3}}$ (4) $\frac{10}{3+2\sqrt{3}}$

8. $a \times b$ (लम्बाई $\times$ चौड़ाई) की एक आयाताकार चद्दर के प्रत्येक कोने से x भुजा के वर्ग काटकर तथा फलकों को मोड़कर ढक्कन रहित एक संदूक बनाया गया है। यदि संदूक का आयतन अधिकतम है, तो x बराबर है :

(1) $\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{12}$

(2) $\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2+ab}}{6}$

(3) $\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$

(4) $\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$

9. माना $f(x)$ एक त्रिघातीय बहुपद है जिसके लिए $f(1) = -10$, $f(-1) = 6$ हैं, तथा f का एक स्थानीय निम्नतम बिंदु $x = 1$ है और $f'(x)$ का एक स्थानीय निम्नतम बिंदु $x = -1$ है। तो $f(3)$ बराबर है_____ ।

10. एक व्यक्ति बिन्दु $P(-3,4)$ से चलना शुरू करता है, तथा x-अक्ष को R पर छूता है और तब मुडकर बिंदू $Q(0, 2)$ पर पहुँच जाता है। व्यक्ति स्थिर चाल से चल रहा है। यदि व्यक्ति न्यूनतम समय में Q बिन्दु पर पहुँचता है तब $50\left((PR)^2+(RQ)^2\right)$ बराबर है_____ ।

11. α का न्यूनतम मान, जिसके लिए समीकरण $\frac{4}{\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}=\alpha$ का अन्तराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में कम से कम एक हल है, है _______ ।

12. माना x में एक बहुपद f(x) की घात 6 है, तथा पद x^6 का गुणांक एक है और $x = -1$ तथा $x = 1$ इसके चरम बिन्दु हैं। यदि $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=1$, है, तो $5\cdot f(2)$ बराबर है_______.

13. $f(x)=a^{a^x}+a^{1-a^x}$, जहाँ $a, x \in R$ तथा $a > 0$, हैं, का न्यूनतम मान बराबर है :

(1) 2a (2) $2\sqrt{a}$

(3) $a+\frac{1}{a}$ (4) a + 1

14. 'r' त्रिज्या के एक वत्त के अंतर्गत अधिकतम क्षेत्रफल का त्रिभुज निम्न में से कौनसा है ?

(1) एक समद्विबाहु त्रिभुज जिसका आधार 2r है

(2) एक समबाहु त्रिभुज जिसकी ऊँचाई $\frac{2r}{3}$ है

(3) एक समबाहु त्रिभुज जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई $\sqrt{3}r$ है।

(4) एक समकोण त्रिभुज जिसकी दो भुजाओं की लम्बाई 2r तथा r है

15. $a \in \mathbb{R}$ का परिसर, जिसके लिए फलन

$$f(x)=(4a-3)(x+\log_e 5)+2(a-7)\cot\left(\frac{x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

$x \neq 2n\pi, n \in \mathbb{N}$ के क्रांतिक बिन्दु है, है :

(1) (–3, 1) (2) $\left[-\frac{4}{3}, 2\right]$ (3) $[1, \infty)$ (4) $(-\infty,-1]$

SOLUTION

1. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $A = \begin{bmatrix} 1 & -x & 2x+1 \\ -x & 1 & -x \\ 2x+1 & -x & 1 \end{bmatrix}$

$|A| = 4x^3 - 4x^2 - 4x = f(x)$

$f'(x) = 4(3x^2 - 2x - 1) = 0$

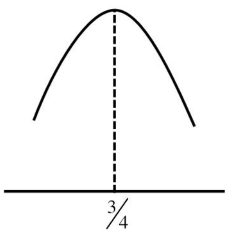
$\Rightarrow x = 1 \; ; \; x = \dfrac{-1}{3}$

$\therefore \underbrace{f(1) = -4}_{\text{min}} \; ; \underbrace{f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{20}{27}}_{\text{max.}}$

Sum $= -4 + \dfrac{20}{27} = -\dfrac{88}{27}$

2. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



$\dfrac{-B}{2A} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{-(6)}{2a} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow a = \dfrac{-6 \times 4}{6} \Rightarrow a = -4$

$\therefore g(x) = 4x^2 - 6x + 15$

Local max. at $x = \dfrac{-B}{2A} = -\dfrac{(-6)}{2(-4)}$

$= \dfrac{-3}{4}$

3. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f(x) = x^3 - 3x^2 - \dfrac{3}{2} f''(2)\, x + f''(1)$ .....(i)

$f'(x) = 3x^2 - 6x - \dfrac{3}{2} f''(2)$ .....(ii)

$f''(x) = 6x - 6$ .....(iii)

Now is 3rd equation

$f''(2) = 12 - 6 = 6$

$f''(11 = 0)$

Use (ii)

$f'(x) = 3x^2 - 6x - \dfrac{3}{2} f''(2)$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - \dfrac{3}{2} \times 6$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

$\Rightarrow x = -1 \;\&\; 3$

Use (iii)

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(-1) = -12 < 0$ maxima

$f''(3) = 12 > 0$ minima.

Use (i)

$f(x) = x^3 - 3x^2 - \dfrac{3}{2} f''(2)\, x + f''(1)$

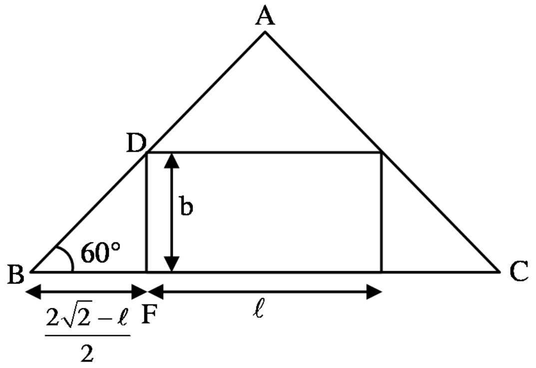
$f(x) = x^3 - 3x^2 - \dfrac{3}{2} \times 6 \times x + 0$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f(3) = 27 - 27 - 9 \times 3 = -27$

4. **Official Ans. by NTA (3)**

Sol.



In ΔDBF

$$\tan 60° = \frac{2b}{2\sqrt{2}-\ell} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}\left(2\sqrt{2}-\ell\right)}{2}$$

A = Area of rectangle = $\ell \times b$

$$A = \ell \times \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2\sqrt{2}-\ell\right)$$

$$\frac{dA}{d\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2\sqrt{2}-\ell\right) - \frac{\ell.\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\boxed{\ell = \sqrt{2}}$$

$$A = \ell \times b = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{A^2 = 3}$$

5. **Official Ans. by NTA (36)**

Sol. Let x + y = 36

x is perimeter of square and y is perimeter of circle side of square = x/4

radius of circle = $\frac{y}{2\pi}$

Sum Areas = $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \pi\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2$

$= \frac{x^2}{16} + \frac{(36-x)^2}{4\pi}$

For min Area :

$x = \frac{144}{\pi+4}$

$\Rightarrow$ Radius = y = $36 - \frac{144}{\pi+4}$

$\Rightarrow k = \frac{36\pi}{\pi+4}$

$\left(\frac{4}{\pi}+1\right)k = 36$

6. **Official Ans. by NTA (3)**

Sol. $f(x) = \left(\frac{2}{x}\right)^{x^2}$; $x > 0$

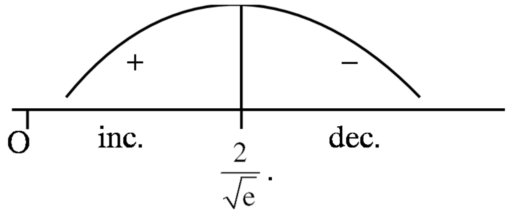
$\ell n\, f(x) = x^2\,(\ell n2 - \ell nx)$

$f'(x) = f(x)\,\{-x + (\ell n\, 2 - \ell n\, x)2x\}$

$$f'(x) = \underbrace{f(x)}_{+}.\underbrace{x}_{+}\underbrace{(2\ell n2 - 2\ell nx - 1)}_{g(x)}$$

$g(x) = 2\ell\, n^2 - 2\ell\, n\, x - 1$

$= \ell n\frac{4}{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{e}}$

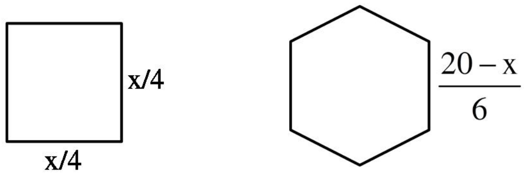


LM = $\frac{2}{\sqrt{e}}$

Local maximum value = $\left(\frac{2}{2/\sqrt{e}}\right)^{\frac{4}{e}} \Rightarrow e^{\frac{2}{e}}$

7. Official Ans. by NTA (4)

Sol. Let the wire is cut into two pieces of length x and 20 – x.



Area of square $=\left(\frac{x}{4}\right)^2$ Area of regular hexagon

$$=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{20-x}{6}\right)^2$$

Total area $=A(x)=\frac{x^2}{16}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{(20-x)^2}{36}$

$$A'(x)=\frac{2x}{16}+\frac{3\sqrt{3}\times 2}{2\times 36}(20-x)(-1)$$

$A'(x) = 0$ at $x=\frac{40\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}$

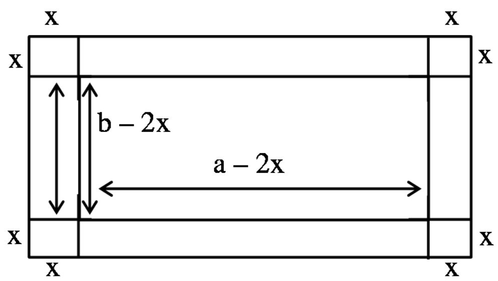
Length of side of regular Hexagon $=\frac{1}{6}(20-x)$

$$=\frac{1}{6}\left(20-\frac{4.\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{10}{2+2\sqrt{3}}$$

8. Official Ans. by NTA (3)

Sol.



$V = \ell.\,b.\,h \quad = (a-2x)(b-2x)x$

$\Rightarrow V(x) = (2x-a)(2x-b)x$

$\Rightarrow V(x) = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}v(x) = 12x^2 - 4(a+b)x + ab$

$\frac{d}{dx}(v(x)) = 0$

$\Rightarrow 12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0 <^{\alpha}_{\beta}$

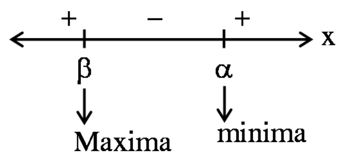
$$\Rightarrow x=\frac{4(a+b)\pm\sqrt{16(a+b)^2-48ab}}{2(12)}$$

$$=\frac{(a+b)\pm\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$$

Let $x=\alpha=\frac{(a+b)+\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$

$\beta=\frac{(a+b)-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{6}$

Now, $12(x-\alpha)(x-\beta) = 0$



$\therefore\ x = \beta$

$$=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{b}$$

9. Official Ans. by NTA (22)

Sol. $F'(x) = a(x-1)(x+3)$

$F''(x) = 6a(x+1)$

$F'(x) = 3a(x+1)^2 + b$

$F'(1) = 0 \Rightarrow b = -12a$

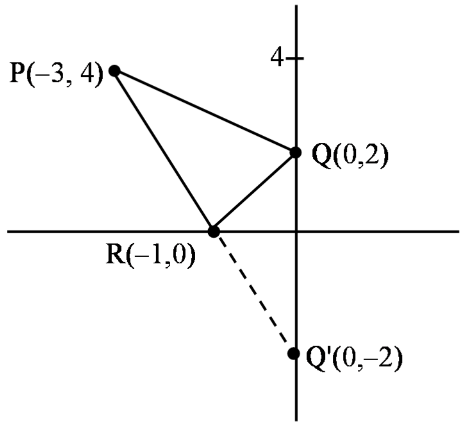
$F(x) = a(x+1)^3 - 12ax + c$

$= (x+1)^3 - 12x - 6$

$F(3) = 64 - 36 - 6 = 22$

10. Official Ans. by NTA (1250)

Sol.



$50(PR^2 + RQ^2)$

$50\ (20 + 5)$

$50(25)$

$= 1250$

11. Official Ans. by NTA (9)

Sol. Let $f(x) = \frac{4}{\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x = 2/3$

$\therefore f(x)_{\min} = \frac{4}{2/3} + \frac{1}{1-2/3} = 9$

$f(x)\max \to \infty$

$f(x)$ is continuous function

$\therefore \alpha_{\min} = 9$

12. Official Ans. by NTA (144)

Sol. Let $f(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

as $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$ non-zero finite

So, $d = e = f = 0$

and $f(x) = x^3(x^3 + ax^2 + bx + c)$

Hence, $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} = c = 1$

Now, as $f(x) = x^6 + ax^5 + bx^4 + x^3$

and $f'(x) = 0$ at $x = 1$ and $x = -1$

i.e., $f'(x) = 6x^5 + 5ax^4 + 4bx^3 + 3x^2$

$f'(1) = 0$

$\Rightarrow 6 + 5a + 4b + 3 = 0$

$\Rightarrow 5a + 4b = -9$

& $f'(-1) = 0$

$\Rightarrow -6 + 5a - 4b + 3 = 0$

$\Rightarrow 5a - 4b = 3$

Solving both we get,

$a = \frac{-6}{10} = \frac{-3}{5};\ b = \frac{-3}{2}$

$\therefore f(x) = x^6 - \frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + x^3$

$\therefore 5f(2) = 5\left[64 - \frac{3}{5}\cdot 32 - \frac{3}{2}\cdot 16 + 8\right]$

$= 320 - 96 - 120 + 40$

$= 144$

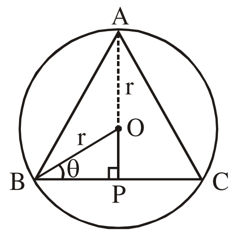
13. Official Ans. by NTA (2)

Sol. A.M. $\geq$ G.M.

$f(x) = a^{a^x} + a^{1-a^x} = a^{a^x} + \frac{a}{a^{a^x}} \geq 2\sqrt{a}$

14. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $h = r\sin\theta + r$



base = BC = $2r\cos\theta$

$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Area of $\Delta ABC = \frac{1}{2}(BC).h$

$\Delta = \frac{1}{2}(2r\cos\theta).(r\sin\theta + r)$

$= r^2\ (\cos\theta).(1 + \sin\theta)$

$\frac{d\Delta}{d\theta} = r^2\left[\cos^2\theta - \sin\theta - \sin^2\theta\right]$

$= r^2[1 - \sin\theta - 2\sin^2\theta]$

$= \underbrace{r^2[1+\sin\theta]}_{\text{positive}}[1 - 2\sin\theta] = 0$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$\oplus\uparrow$ $\ominus\downarrow$

0 $\pi/6$ $\pi/2$

$\Rightarrow \Delta$ is maximum where $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\Delta_{\max.} = \frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ = area of equilateral Δ with

BC = $\sqrt{3}r$.

15. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $f(x) = (4a - 3)(x + \log_e 5) + (a - 7)\sin x$

$f(x) = (4a - 3)(1) + (a - 7)\cos x = 0$

$$\Rightarrow \quad \cos x = \frac{3-4a}{a-7}$$

$$-1 \le \frac{3-4a}{a-7} < 1$$

$$\frac{3-4a}{a-7} + 1 \ge 0$$

$$\frac{3-4a+a-7}{a-7} \ge 0$$

$$\frac{-3a-4}{a-7} \ge 0$$

$$\frac{3a+4}{a-7} \le 0$$

$$\frac{3-4a}{a-7} < 1$$

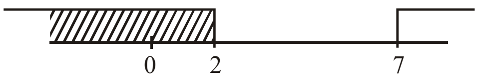
$$\frac{3-4a}{a-7} - 1 < 0$$

$$\frac{3-4a-a+7}{a-7} < 0$$

$$\frac{-5a+10}{a-7} < 0$$

$$\frac{5a-10}{a-7} > 0$$

$$\frac{5(a-2)}{a-7} > 0$$



$$\alpha \in \left[-\frac{4}{3}, 2\right)$$

Check end point $\left[-\frac{4}{3}, 2\right)$