GRAVITATION

1. द्रव्यमान m के एक उपग्रह को पृथ्वी की सतह से ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर u गति से प्रक्षेपित किया जाता है। जब यह उपग्रह R (R = पृथ्वी की त्रिज्या) की ऊँचाई पर पहुँचता है, तो यह $\frac{m}{10}$ द्रव्यमान के एक रॉकेट का उत्क्षेपण (rejection) इस प्रकार से करता है कि उपग्रह तत्पश्चात् एक वृत्तीय कक्षा में चलने लगता है। उत्क्षेपित रॉकेट की गतिज ऊर्जा है (G गुरूत्त्वाकर्षण स्थिरांक व M पृथ्वी का द्रव्यमान है):

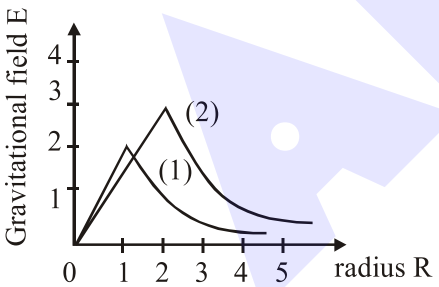
(1) $\frac{m}{20}\left(u-\sqrt{\frac{2GM}{3R}}\right)^2$

(2) $5m\left(u^2-\frac{119}{200}\frac{GM}{R}\right)$

(3) $\frac{3m}{8}\left(u+\sqrt{\frac{5GM}{6R}}\right)^2$

(4) $\frac{m}{20}\left(u^2+\frac{113}{200}\frac{GM}{R}\right)$

2. दो ठोस गोले जिनकी त्रिज्याएँ $R_1 = 1m$ और $R_2 = 2m$ है और जिनके द्रव्यमान क्रमशः M_1 और M_2 है, को संज्ञान में लें। गोले (1) एवं (2) द्वारा जनित गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र चित्र में दिखाये गये हैं। तब $\frac{M_1}{M_2}$ का मान है :



(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{6}$

3. एक क्षुदग्रह (asteroid) पृथ्वी के केन्द्र से 10R (R पृथ्वी की त्रिज्या है) दूरी पर है और पृथ्वी के केन्द्र की ओर 12 km/s गति से आ रहा है। यदि पृथ्वी से पलायन गति का मान 11.2 km/s^{-1} है तो पृथ्वी के वातावरण के प्रभाव को नगण्य मानते हुए इस क्षुद्रग्रह की पृथ्वी की सतह से टकराते समय गति कितनी होगी ? (अपना उत्तर kms^{-1} में निकटतम पूर्णांक में दें) _____.

4. द्रव्यमान m को एक वस्तु A एक ग्रह के चारों ओर R त्रिज्या की एक वृत्तीय कक्षा में चल रही है। द्रव्यमान $\frac{m}{2}$ की एक दूसरी वस्तु B वस्तु A से $\left(\frac{\vec{v}}{2}\right)$ वेग से टकराती है। यहाँ $\vec{v}$ वस्तु A का तात्क्षणिक वेग है। यह टक्कर पूर्णतः अप्रत्यास्थ है। तब संयुक्त वस्तु :

(1) एक दीर्घवृत्त कक्षा में चलना शुरू कर देगी।

(2) वृत्तीय कक्षा में चलती रहेगी।

(3) ग्रह की ओर ऊर्ध्वाधर दिशा में गिरेगी।

(4) ग्रह के गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र से पलायन कर जायेगी।

5. ग्रह A का द्रव्यमान M एवं त्रिज्या R है। ग्रह B का द्रव्यमान एवं त्रिज्या, ग्रह A से आधी है। यदि ग्रह A व B के पलायन वेग क्रमशः ν_A व ν_B है तो $\frac{\nu_A}{\nu_B}=\frac{n}{4}$ है।

n का मान है :

(1) 4 (2) 1

(3) 2 (4) 3

6. एक गोलाकार गैलेक्सी में इसके केन्द्र से बहुत दूरी 'r' पर इसका द्रव्यमान घनत्व $\frac{K}{r}$ फलन द्वारा दिया जाता है। इस क्षेत्र में एक छोटा तारा R त्रिज्या को एक वृत्ताकार कक्षा में घूम रहा है। तब इसका आवर्तकाल T इसकी त्रिज्या R पर इस प्रकार निर्भर करेगा:

(1) $T \propto R$ (2) $T^2 \propto \frac{1}{R^3}$

(3) $T^2 \propto R$ (4) $T^2 \propto R^3$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Physics\Hindi\Gravitation

7. पृथ्वी की सतह से ऊँचाई h पर एक पिण्ड का भार उतना ही है जितना सतह से उतनी ही गहराई h पर। h का मान है (R = पृथ्वी की त्रिज्या, पृथ्वी के घूर्णन का भार पर प्रभाव नगण्य मानें) :

(1) $\frac{\sqrt{5}R-R}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{2}R-R$

(3) $\frac{R}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{3}R-R}{2}$

8. एक उपग्रह पृथ्वी के चारों ओर लगभग वृत्ताकार कम ऊँचाई की एक कक्षा में चल रहा है। कक्षा की त्रिज्या लगभग पृथ्वी की त्रिज्या R_e के बराबर है। किसी एक क्षण पर उपग्रह पर लगे राकेटों को दागकर इसकी तात्कलिक गति इसके वेग की दिशा में $\sqrt{\frac{3}{2}}$ गुना बढ़ा दी जाती हैं। इसके कारण पृथ्वी के केन्द्र से उपग्रह की अधिकतम दूरी R हो जाती है। R का मान है:

(1) $4R_e$ (2) $3R_e$ (3) $2R_e$ (4) $2.5R_e$

9. त्रिज्या R के एक ग्रह में इसका द्रव्यमान घनत्व $\rho(r)=\rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$ है r इसके केन्द्र से दूरी है। इस ग्रह का गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र r के किस मान पर अधिकतम होगा ?

(1) $r=\frac{1}{\sqrt{3}}R$ (2) $r=\sqrt{\frac{5}{9}}R$

(3) $r=\sqrt{\frac{3}{4}}R$ (4) r = R

10. किसी द्रव्यमान वितरण के कारण x-अक्ष पर मूलबिन्दु से x दूरी पर x-दिशा में गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र $\frac{Ax}{(x^2+a^2)^{3/2}}$ द्वारा दिया जाता है। x-अक्ष पर x दूरी पर गुरूत्वीय विभव का परिमाण क्या होगा जबकि अनन्त पर इसका मान शून्य लिया गया है:-

(1) $\frac{A}{(x^2+a^2)^{1/2}}$ (2) $\frac{A}{(x^2+a^2)^{3/2}}$

(3) $A(x^2+a^2)^{3/2}$ (4) $A(x^2+a^2)^{1/2}$

11. द्रव्यमान M और त्रिज्या R के एक ग्रह के चारों ओर एक नीची वृत्तीय कक्षा में एक वस्तु गतिशील है। कक्षा की त्रिज्या R ली जा सकती है। इस दशा में इस वस्तु की कक्षा में गति और ग्रह के पलायन वेग का अनुपात होगा: –

(1) 1 (2) 2 (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $\sqrt{2}$

12. पृथ्वी की सतह से ऊँचाई $h=\frac{R}{2}$ (R = पृथ्वी की त्रिज्या) पर गुरूत्वीय त्वरण का मान g_1 है। यदि पृथ्वी की सतह से गहराई d पर भी इसका मान फिर से g_1 पाया जाता है, तो $\left(\frac{d}{R}\right)$ का मान होगा :

(1) $\frac{7}{9}$ (2) $\frac{4}{9}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{5}{9}$

13. पृथ्वी की सतह के ध्रुवों पर गुरूत्वीय त्वरण 'g' है तथा ध्रुवों से जाने वाली अक्ष के सापेक्ष पृथ्वी की कोणीय चाल ω है। एक वस्तु का भार भूमध्य रेखा पर तथा ध्रुवों से 'h' ऊँचाई पर एक कमानीदार तुला द्वारा नापा गया। यदि दोनों भारों का मान बराबर पाया जाता है, तब ऊँचाई h का मान होगा : (h<<R, जहाँ R पृथ्वी की त्रिज्या है)

(1) $\frac{R^2\omega^2}{8g}$ (2) $\frac{R^2\omega^2}{4g}$ (3) $\frac{R^2\omega^2}{g}$ (4) $\frac{R^2\omega^2}{2g}$

14. एक उपग्रह किसी ग्रह P के चारों ओर एक दीर्घवृत्तीय कक्ष में है। देखा जाता है कि जब उपग्रह, ग्रह से अधिकतम दूरी पर है तो उसकी चाल उस चाल से 6 गुना कम है जबकि वह ग्रह से निकटतम दूरी पर है। उपग्रह और ग्रह के बीच की निकटतम तथा अधिकतम दूरियों का अनुपात होगा :

(1) 1 : 6 (2) 3 : 4 (3) 1 : 3 (4) 1 : 2

15. दो ग्रहों के द्रव्यमान M तथा 16 M और उनकी त्रिज्यायें क्रमशः a तथा 2a है। इन दों ग्रहों के केन्द्रों के बीच की दूरी 10a हैं बड़े ग्रह से छोटे ग्रह की ओर, m द्रव्यमान के एक पिण्ड को, उनके केन्द्रों को जोड़ने वाली दिशा में दागा जाता है। तो, छोटे ग्रह के पृष्ठ पर पहुंच पाने के लिये, उस पिण्ड के दांये जाने की न्यूनतम चाल होनी चाहिए ?

(1) $\sqrt{\frac{GM^2}{ma}}$ (2) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5GM}{a}}$

(3) $4\sqrt{\frac{GM}{a}}$ (4) $2\sqrt{\frac{GM}{a}}$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Physics\Hindi\Gravitation

SOLUTION

1. NTA Ans. (2)

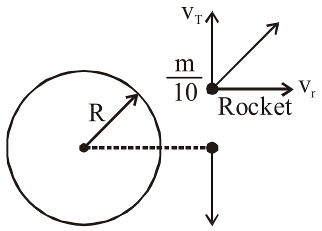
Sol. Applying energy conservation

$K_i + U_i = K_f + U_f$

$$\frac{1}{2}mu^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{2R}$$

$$v = \sqrt{u^2 - \frac{GM}{R}} \quad ....(i)$$

By momentum conservation, we have



$$\frac{m}{10}v_T = \frac{9m}{10}\sqrt{\frac{GM}{2R}} \quad ....(ii)$$

& $\frac{m}{10}v_r = mv$

$$\Rightarrow \frac{m}{10}v_r = m\sqrt{u^2 - \frac{GM}{R}} \quad ....(iii)$$

Kinetic energy of rocket

$$= \frac{1}{2}m\left(v_T^2 + v_r^2\right)$$

$$= \frac{m}{20}\left(81\frac{GM}{2R} + 100u^2 - 100\frac{GM}{R}\right)$$

$$= \frac{m}{20}\left(100u^2 - \frac{119GM}{2R}\right)$$

$$= 5m\left(u^2 - \frac{119GM}{200R}\right).$$

2. NTA Ans. (4)

Sol. Gravitational field on the surface of a solid sphere $I_g = \frac{GM}{R^2}$

By the graph

$$\frac{GM_1}{(1)^2} = 2 \quad \text{and} \quad \frac{GM_2}{(2)^2} = 3$$

On solving

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{6}$$

3. NTA Ans. (16)

Sol. $U_1 + K_1 = U_2 + K_2$

$$-\frac{GM_e m}{10R} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{GM_e m}{R} + \frac{1}{2}mv^2$$

$$+\frac{9}{10} \times \frac{GM_e m}{R} + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\frac{9}{10} \times \frac{1}{2}M \times v_e^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{9}{10}v_e^2 + v_0^2 \qquad \Rightarrow = \frac{9}{10} \times (11.2)^2 + (12)^2$$

$v^2 = 112.896 + 144$

$v = 16.027$

$v = 16$ km/s

4. NTA Ans. (1)

Sol. Initially, the body of mass m is moving in a circular orbit of radius R. So it must be moving with orbital speed.

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

After collision, let the combined mass moves with speed v_1

$$mv_0 + \frac{m}{2}\frac{v_0}{2} = \left(\frac{3m}{2}\right)v_1 \qquad \Rightarrow v_1 = \frac{5v_0}{6}$$

Since after collision, the speed is not equal to orbital speed at that point. So motion cannot be circular. Since velocity will remain tangential, so it cannot fall vertically towards the planet.

Their speed after collision is less than escape speed $\sqrt{2}v_0$, so they cannot escape gravitational field.

So their motion will be elliptical around the planet.

5. NTA Ans. (1)

Sol. $V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ (Escape velocity)

$$V_A = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

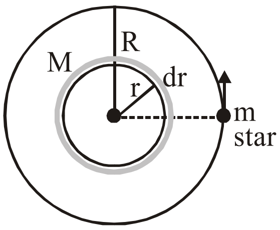
$$V_B = \sqrt{\frac{2G[M/2]}{R/2}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$\frac{V_A}{V_B} = 1 = \frac{n}{4} \Rightarrow n = 4$$

$\therefore$ Correct answer (1)

6. Official Ans. by NTA (3)

Sol.



$dm = \rho dv$

$$dm = \left(\frac{k}{r}\right)(4\pi r^2 dr)$$

$dm = 4\pi k r dr$

$$M = \int_0^R dm = \int_0^R 4\pi k r dr$$

$$M = 4\pi k \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^R$$

$M = 2\pi k(R^2 - 0)$

$M = 2\pi k R^2$

for circular motion gravitational force will provide required centripital force or

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

$$\frac{G(2\pi k R^2)m}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{2\pi G k R}$$

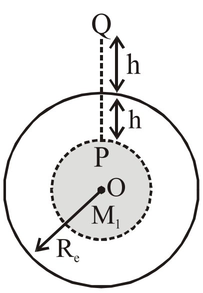
Time period $T = \dfrac{2\pi R}{v}$

$$T = \frac{2\pi R}{\sqrt{2\pi G k R}} \propto \sqrt{R}$$

or $T^2 \propto R$

7. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



- M = mass of earth

M_1 = mass of shaded portion

R = Radius of earth

- $$M_1 = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi(R-h)^3$$

$$= \frac{M(R-h)^3}{R}$$

- Weight of body is same at P and Q

i.e. $mg_P = mg_Q$

$g_P = g_Q$

$$\frac{GM_1}{(R-h)^2} = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$$\frac{GM(R-h)^3}{(R-h)^2 R^3} = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

$(R - h)(R + h)^2 = R^3$

$R^3 - hR^2 - h^2R - h^3 + 2R^2 h - 2Rh^2 = R^3$

$R^2 - Rh^2 - h^3 = 0$

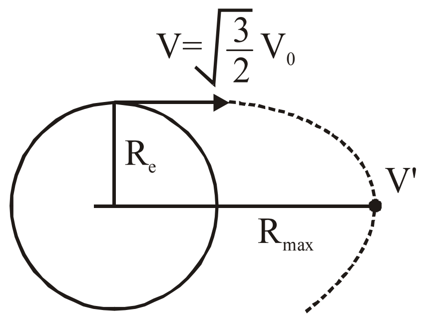
$R^2 - Rh - h^2 = 0$

$$h^2 + Rh - R^2 = 0 \Rightarrow h = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2}$$

$$\text{ie } h = \frac{-R + \sqrt{5}R}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)R$$

8. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



$$V_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_e}}$$

$$\frac{-GMm}{R_e} + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{-GMm}{R_{max}} + \frac{1}{2}mv'^2 \quad \text{....(i)}$$

$VR_e = V'R_{max}$ ....(ii)

Solving (i) & (ii)

$$\boxed{R_{max} = 3R_e}$$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Physics\Hindi\Gravitation

9. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $E\,4\pi r^2 = \int \rho_0 4\pi r^2 dr$

$$\Rightarrow Er^2 = 4\pi G\int_0^r \rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)r^2 dr$$

$$\Rightarrow E = 4\pi G\rho_0\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right)$$

$$\frac{dE}{dr}=0 \;\therefore\; r=\sqrt{\frac{5}{9}}\,R$$

10. Official Ans. by NTA (1)

Sol. Given $E_G = \dfrac{Ax}{(x^2+a^2)^{3/2}},\ V_\infty = 0$

$$\int_{V_\infty}^{V_x} dV = -\int_\infty^x \vec{E}_G.\vec{d}_x$$

$$V_x - V_\infty = -\int_\infty^x \frac{Ax}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx$$

put $x^2 + a^2 = z$

$2x\,dx = dz$

$$V_x - 0 = -\int_\infty^x \frac{A\,dz}{2(z)^{3/2}} = \left[\frac{A}{z^{1/2}}\right]_\infty^x = \left[\frac{A}{(x^2+a^2)^{1/2}}\right]_\infty^x$$

$$V_x = \frac{A}{(x^2+a^2)^{1/2}} - 0 = \frac{A}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

11. Official Ans. by NTA (3)

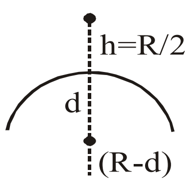
Sol. $V_{orbit} = \sqrt{\dfrac{GM}{R}}$

$$V_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$\frac{V_{orbit}}{V_{escape}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

12. Official Ans. by NTA (4)

Sol.



$$g_1 = \frac{GM}{\left(R+\frac{R}{2}\right)^2} \quad \ldots (1)$$

$$g_2 = \frac{GM(R-d)}{R^3} \quad \ldots (2)$$

$g_1 = g_2$

$$\frac{GM}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2} = \frac{GM(R-d)}{R^3}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{(R-d)}{R}$$

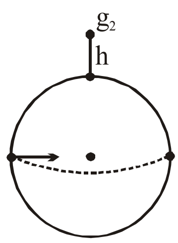
$4R = 9R - 9d$

$$5R = 9d \Rightarrow \frac{d}{R} = \frac{5}{9}$$

13. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $g_e = g - R\omega^2$

$$g_2 = g\left(1-\frac{2h}{R}\right) \qquad g_1 = ge$$



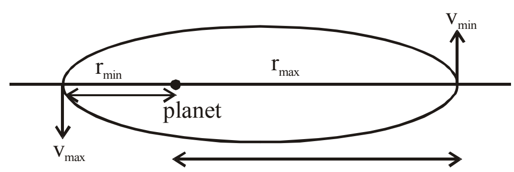
$$g_2 = g - \frac{2gh}{R}$$

$$\text{Now } R\omega^2 = \frac{2gh}{R}$$

$$h = \frac{R^2\omega^2}{2g}$$

14. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



By angular momentum conservation

$r_{min}v_{max} = r_{max}v_{min}$ ... (i)

Given $v_{min} = \dfrac{v_{max}}{6}$

from equation (i)

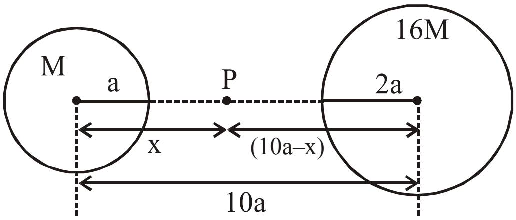
node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Physics\Hindi\Gravitation

$$\frac{r_{min}}{r_{max}} = \frac{v_{min}}{v_{max}} = \frac{1}{6}$$

Ans. (1)

15. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



$$\frac{GM}{x^2} = \frac{G(16M)}{(10a-x)^2}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{4}{(10a-x)} \qquad \Rightarrow 4x = 10a - x$$

$x = 2a$ ....(i)

COME

$$-\frac{GMm}{8a} - \frac{G(16M)m}{2a} + KE$$

$$= -\frac{GMm}{2a} - \frac{G(16M)m}{8a}$$

$$KE = GMm\left[\frac{1}{8a} + \frac{16}{2a} - \frac{1}{2a} - \frac{16}{8a}\right]$$

$$KE = GMm\left[\frac{1+64-4-16}{8a}\right]$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = GMm\left[\frac{45}{8a}\right]$$

$$V = \sqrt{\frac{90GM}{8a}}$$

$$V = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5GM}{a}}$$