VECTORS

1. माना $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन मात्रक (unit) सदिश इस प्रकार हैं कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. यदि $\lambda = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ तथा $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$, तो क्रमित युग्म $(\lambda,\vec{d})$ बराबर हैं :

(1) $\left(-\frac{3}{2},3\vec{a}\times\vec{b}\right)$ (2) $\left(-\frac{3}{2},3\vec{c}\times\vec{b}\right)$

(3) $\left(\frac{3}{2},3\vec{b}\times\vec{c}\right)$ (4) $\left(\frac{3}{2},3\vec{a}\times\vec{c}\right)$

2. एक सदिश $\vec{a}=\alpha\hat{i}+2\hat{j}+\beta\hat{k}(\alpha,\beta\in R)$ उस समतल में, जिसमें दोनों सदिश $\vec{b}=\hat{i}+\hat{j}$ तथा $\vec{c}=\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ स्थित हैं। यदि $\vec{a}$ सदिशों $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के बीच के कोण को समद्विभाजित करता है, तो:

(1) $\vec{a}.\hat{i}+1=0$ (2) $\vec{a}.\hat{i}+3=0$

(3) $\vec{a}.\hat{k}+4=0$ (4) $\vec{a}.\hat{k}+2=0$

3. माना दो सदिश $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ है यदि एक सदिश $\vec{c}$ इस प्रकार है कि $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{a}$ तथा $\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ है, तो $\vec{c}\cdot\vec{b}$ बराबर है :

(1) $\frac{1}{2}$ (2) -1

(3) $-\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{3}{2}$

4. माना एक समान्तर षट्फलक, जिसके एक ही शीर्ष से होकर जाने वाले किनारे $\vec{u}=\hat{i}+\hat{j}+\lambda\hat{k}$, $\vec{v}=\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $\vec{w}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ द्वारा प्रदत्त हैं, का आयतन 1 घन इकाई है। यदि किनारों $\vec{u}$ तथा $\vec{w}$ के बीच का कोण θ है, तो $\cos\theta$ हो सकता है :

(1) $\frac{7}{6\sqrt{3}}$ (2) $\frac{5}{7}$

(3) $\frac{7}{6\sqrt{6}}$ (4) $\frac{5}{3\sqrt{3}}$

5. माना तीन सदिश $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{b}.\vec{c}=10$ तथा $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के बीच का कोण $\frac{\pi}{3}$ है। यदि $\vec{a}$, सदिश $\vec{b}\times\vec{c}$ पर लम्बवत् है, तो $\left|\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\right|$ बराबर है _____.

6. यदि सदिश $\vec{p}=(a+1)\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}$, $\vec{q}=a\hat{i}+(a+1)\hat{j}+a\hat{k}$ तथा $\vec{r}=a\hat{i}+a\hat{j}+(a+1)\hat{k}$ $(a\in R)$ सहतलीय हैं तथा $3(\vec{p}.\vec{q})^2-\lambda|\vec{r}\times\vec{q}|^2=0$ है, तो λ का मान है ———।

7. बिन्दुओं (1, –1, 3) तथा (2, –4, 11) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का बिन्दुओं (–1, 2, 3) तथा (3, –2, 10) को मिलाने वाली रेखा पर प्रक्षेप है ———।

8. माना $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन ऐसे मात्रक सदिश हैं, कि $|\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{c}|^2=8$ है, तो $|\vec{a}+2\vec{b}|^2+|\vec{a}+2\vec{c}|^2$ बराबर है ________.

9. माना बिन्दुओं 'A' तथा 'B' के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ तथा $2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ है। एक बिन्दु P, रेखाखण्ड AB को अन्तः अनुपात $\lambda : 1$ $(\lambda > 0)$ में विभाजित करता है। यदि O मूल बिन्दु है तथा $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}-3|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OP}|^2=6$ है, तो λ बराबर है –

10. सरल रेखाएँ $\vec{r}=(\hat{i}-\hat{j})+\ell(2\hat{i}+\hat{k})$ तथा $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j})+m(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$

(1) काटती हैं जब $\ell = 1$ तथा $m = 2$

(2) काटती हैं जब $\ell = 2$ तथा $m = \frac{1}{2}$

(3) ℓ तथा m के किसी भी मानों के लिए नहीं काटती

(4) ℓ तथा m के सभी मानों के लिए काटती है

11. माना दो रेखाएँ $\vec{r}=\hat{i}+\lambda(\hat{i}+\hat{j})$, $\lambda \in R$ तथा $\vec{r}=-\hat{j}+\mu(\hat{j}-\hat{k})$, $\mu \in R$, एक समतल P पर स्थित हैं। यदि बिन्दु M(1, 0, 1) से समतल P पर डाले गए लम्ब का पाद, बिन्दु Q(α, β, γ) है, तो 3($\alpha + \beta + \gamma$) बराबर है_______ ।

12. माना $f(x)=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ का स्थानीय उच्चिष्ठ x_0 है, जहाँ $\vec{a}=x\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-2\hat{i}+x\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=7\hat{i}-2\hat{j}+x\hat{k}$ है। तब $x=x_0$ पर $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ का मान होगा :

(1) –30 (2) 14
(3) –4 (4) –22

13. यदि $\vec{a}=2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$, है, तो $|\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})|^2+|\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})|^2+|\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})|^2$ का मान है ________।

14. यदि एक समांतर षट्फलक, जिसके एक ही शीर्ष से जाने वाले किनारे (edges) सदिशों $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+n\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}+4\hat{j}-n\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\hat{i}+n\hat{j}+3\hat{k}$ $(n \geq 0)$ द्वारा दिए गए हैं, का आयतन 158 घन इकाइयाँ है, तो :

(1) $\vec{a}\cdot\vec{c}=17$ (2) $\vec{b}\cdot\vec{c}=10$
(3) n = 7 (4) n = 9

15. माना सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ इस प्रकार है कि $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=4$ तथा $|\vec{c}|=4$ हैं। यदि $\vec{b}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप, $\vec{c}$ के $\vec{a}$ पर प्रक्षेप के समान है तथा $\vec{b}$ और $\vec{c}$ परस्पर लम्बवत् है तो $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$ का मान है _________ ।

16. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ एकक सदिश है तो $\sqrt{3}|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|$ का अधिकतम मान है _____.

17. यदि $\vec{x}$ तथा $\vec{y}$ दो शून्येत्तर सदिश इस प्रकार हैं कि $|\vec{x}+\vec{y}|=|\vec{x}|$ और $2\vec{x}+\lambda\vec{y}$ सदिश $\vec{y}$, के लम्बवत है, तो λ का मान है __________ ।

SOLUTION

1. NTA Ans. (1)

Sol. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+2(\vec{b}\cdot\vec{c})+2(\vec{c}\cdot\vec{a})=0$

$\lambda = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{-3}{2}$

$\vec{d} = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{d} = 3(\vec{a}\times\vec{b})$

2. NTA Ans. (4)

ALLEN Ans. (BONUS)

Note: None of the given options matches. So, it should be bonus but NTA did not accept our claim

Sol. $\vec{a}=\lambda\left(\hat{b}+\hat{c}\right)=\lambda\left(\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}+\frac{\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}}{3\sqrt{2}}\right)$

$\vec{a}=\frac{\lambda}{3\sqrt{2}}\left(4\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)\Rightarrow\frac{\lambda}{3\sqrt{2}}(4\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})$

$=\alpha\hat{i}+2\hat{j}+\beta\hat{k}$

$\Rightarrow \alpha = 4$ and $\beta = 4$

So, $\vec{a}=4\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$

None of the given options is correct

3. NTA Ans. (3)

Sol. $\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{b}\times(\vec{c}-\vec{a})=\vec{0}$

$\vec{b}=\lambda(\vec{c}-\vec{a})$ ...(i)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}^2\right)$

$4 = \lambda(0-6) \Rightarrow \lambda=\frac{-4}{6}=\frac{-2}{3}$

from (i) $\vec{b}=\frac{-2}{3}(\vec{c}-\vec{a})$

$\vec{c}=\frac{-3}{2}\vec{b}+\vec{a}=\frac{-1}{2}\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)$

$\boxed{\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}}$ (3) Option

4. NTA Ans. (1)

Sol. $\left\|\begin{matrix}1 & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{matrix}\right\|=1\Rightarrow\lambda=2,4$

Now, $\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{w}}{|\vec{u}||\vec{w}|}$

$=\frac{5}{\sqrt{6}\sqrt{6}}$ or $\frac{7}{\sqrt{6}\sqrt{18}}=\frac{5}{6}$ or $\frac{7}{6\sqrt{3}}$

5. NTA Ans. (30)

Sol. $\vec{b}\cdot\vec{c}=10 \Rightarrow 5|\vec{c}|\cos\frac{\pi}{3}=10 \Rightarrow |\vec{c}|=4$

$\left|\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|=|\vec{a}|\,|\vec{b}\times\vec{c}|$

$=\sqrt{3}\,.\,5\,.\,4\,.\sin\frac{\pi}{4}=30$

6. NTA Ans. (1.00)

Sol. $\vec{p}=(a+1)\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}$,

$\vec{q}=a\hat{i}+(a+1)\hat{j}+a\hat{k}$ and

$\vec{r}=a\hat{i}+a\hat{j}+(a+1)\hat{k}$

$\because$ $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ are coplanar

$\Rightarrow [\vec{p}\ \ \vec{q}\ \ \vec{r}]=0$

$\Rightarrow\begin{vmatrix}a+1 & a & a\\ a & a+1 & a\\ a & a & a+1\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 3a+1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

$\vec{p}.\vec{q}=-\frac{1}{3},\ \vec{r}.\vec{q}=-\frac{1}{3}$

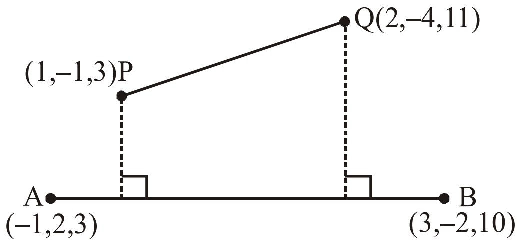
$|\vec{r}|^2=|\vec{q}|^2=\frac{2}{3}$

$\therefore\ 3(\vec{p}.\vec{q})^2-\lambda|\vec{r}\times\vec{q}|^2=0$

$\Rightarrow \lambda=\frac{3(\vec{p}.\vec{q})^2}{|\vec{r}\times\vec{q}|^2}=\frac{3(\vec{p}.\vec{q})^2}{|\vec{r}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{r}.\vec{q})^2}=1.00$

7. NTA Ans. (8.00)

Sol.



Projection of $\overline{PQ}$ on $\overline{AB} = \left|\frac{\overline{PQ}\cdot\overline{AB}}{|\overline{AB}|}\right|$

$$= \left|\frac{(\hat{i}-3\hat{j}+8\hat{k})\cdot(4\hat{i}-4\hat{j}+7\hat{k})}{9}\right| = 8$$

8. Official Ans. by NTA (2.00)

Sol. $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = 8$

$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{a}.\vec{c} = 8$

$\Rightarrow 4 - 2(\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}) = 8$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c} = -2}$

$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 + |\vec{a} + 2\vec{c}|^2$

$= |a^2| + 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a}.\vec{b} + |\vec{a}|^2 + 4|\vec{c}|^2 + 4\vec{a}.\vec{c}$

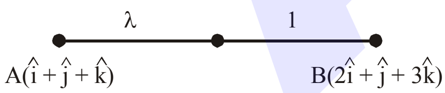
$= 10 + 4(\vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c})$

$= 10 - 8$

$= \boxed{2}$

9. Official Ans. by NTA (0.8)

Sol.



Using section formula we get

$$\overline{OP} = \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}\hat{i} + \frac{\lambda+1}{\lambda+1}\hat{j} + \frac{3\lambda+1}{\lambda+1}\hat{k}$$

Now $\overline{OB}\cdot\overline{OP} = \frac{4\lambda+2+\lambda+1+9\lambda+3}{\lambda+1}$

$$= \frac{14\lambda+6}{\lambda+1}$$

$$\overline{OA}\times\overline{OP} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{2\lambda+1}{\lambda+1} & 1 & \frac{3\lambda+1}{\lambda+1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2\lambda+1}{\lambda+1}\hat{i} + \frac{-\lambda}{\lambda+1}\hat{j} + \frac{-\lambda}{\lambda+1}\hat{k}$$

$$|\overline{OA}\times\overline{OP}|^2 = \frac{(2\lambda+1)^2+\lambda^2+\lambda^2}{(\lambda+1)^2}$$

$$= \frac{6\lambda^2+1}{(\lambda+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{14\lambda+6}{\lambda+1} - 3\times\frac{(6\lambda^2+1)}{(\lambda+1)^2} = 6$$

$\Rightarrow 10\lambda^2 - 8\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0, \frac{8}{10} = 0.8$

$\Rightarrow \lambda = 0.8$

10. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $\vec{r} = \hat{i}(1+2\ell) + \hat{j}(-1) + \hat{k}(\ell)$

$\vec{r} = \hat{i}(2+m) + \hat{j}(m-1) + \hat{k}(-m)$

For intersection

$1 + 2\ell = 2 + m$ ...... (i)

$-1 = m - 1$ ...... (ii)

$\ell = -m$ ...... (iii)

from (ii) $m = 0$

from (iii) $\ell = 0$

These values of m and ℓ do not satisfy equation (1).

Hence the two lines do not intersect for any values of ℓ and m.

11. Official Ans. by NTA (5)

Sol. Dr's normal to plane

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

Equation of plane

$-1(x-1)+1(y-0)+1(z-0)=0$

$x-y-z-1=0$

......(1)

Now $\frac{\alpha-1}{1}=\frac{\beta-0}{-1}=\frac{\gamma-1}{-1}=-\frac{(1-0-1-1)}{3}$

$\frac{\alpha-1}{1}=\frac{\beta}{-1}=\frac{\gamma-1}{-1}=\frac{1}{3}$

$\alpha=\frac{4}{3}, \beta=-\frac{1}{3}, \gamma=\frac{2}{3}$

$3(\alpha+\beta+\gamma)=3\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)=5$

12. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $f(x)=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} x & -2 & 3 \\ -2 & x & -1 \\ 7 & -2 & x \end{vmatrix}=x^3-27x+26$

$f'(x)=3x^2-27=0 \Rightarrow x=\pm 3$

and $f''(-3)<0$

$\Rightarrow$ local maxima at $x=x_0=-3$

Thus, $\vec{a}=-3\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$,

$\vec{b}=-2\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k}$,

and $\vec{c}=7\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}=9-5-26=-22$

13. Official Ans. by NTA (18)

Sol. $\Sigma|\vec{a}-(\vec{a}\cdot i)i|^2$

$\Rightarrow \Sigma\left(|a|^2+(\vec{a}\cdot i)^2-2(\vec{a}\cdot i)^2\right)$

$\Rightarrow 3|\vec{a}|^2-\Sigma(\vec{a}\cdot i)^2$

$\Rightarrow 2|\vec{a}|^2$

$\Rightarrow 18$

14. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $v=[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

$158=\begin{vmatrix} 1 & 1 & n \\ 2 & 4 & -n \\ 1 & n & 3 \end{vmatrix}, n\ge 0$

$158=1(12+n^2)-(6+n)+n(2n-4)$

$158=n^2+12-6-n+2n^2-4n$

$3n^2-5n-152=0$

$n=8, -\frac{38}{6}$ (rejected)

$\vec{a}\cdot\vec{c}=1+n+3n=1+4n=33$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=2+4n-3n=2+n=10$

15. Official Ans. by NTA (6.00)

Sol. Projection of $\vec{b}$ on $\vec{a}$ = projection of $\vec{c}$ on $\vec{a}$

$\Rightarrow \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|} \Rightarrow \vec{b}\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\because \vec{b}$ is perpendicular to $\vec{c} \Rightarrow \vec{b}\cdot\vec{c}=0$

Let $|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=k$

Square both sides

$k^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{c}-2\vec{b}\cdot\vec{c}$

$k^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2=36$

$k=6=|\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$

16. Official Ans. by NTA (4.00)

Sol. $\sqrt{3}|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{a}-\vec{b}|$

$=\sqrt{3}\left(\sqrt{2+2\cos\theta}\right)+\sqrt{2-2\cos\theta}$

$=\sqrt{6}\left(\sqrt{1+\cos\theta}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{1-\cos\theta}\right)$

$=2\sqrt{3}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|+2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$

$\le\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+(2)^2}=4$

17. Official Ans. by NTA (1.00)

Sol. $|\vec{x}+\vec{y}|=|\vec{x}|$

$\sqrt{|\vec{x}|^2+|\vec{y}|^2+2\vec{x}.\vec{y}}=|\vec{x}|$

$|\vec{y}|^2+2\vec{x}.\vec{y}=0$ .... (1)

Now $(2\vec{x}+\lambda\vec{y}).\vec{y}=0$

$2\vec{x}.\vec{y}+\lambda|\vec{y}|^2=0$

from (1)

$-|\vec{y}|^2+\lambda|\vec{y}|^2=0$

$(\lambda-1)|\vec{y}|^2=0$

given $|\vec{y}|\ne 0 \Rightarrow \lambda=1$