MAXIMA & MINIMA

1. माना 5 घात के एक बहुपद $f(x)$ के क्रांतिक बिन्दु $x = \pm 1$ हैं। यदि $\lim\limits_{x\to 0}\left(2+\frac{f(x)}{x^3}\right)=4$ है, तो निम्न में से कौन सा एक सत्य **नहीं** है?

(1) f एक विषम फलन है।

(2) f का एक निम्ननिष्ठ बिन्दु x = 1 है तथा एक उच्चिष्ठ बिन्दु x = –1 है।

(3) f का एक उच्चिष्ठ बिन्दु x = 1 है तथा एक निम्ननिष्ठ बिन्दु x = –1 है।

(4) f(1) – 4f(–1) = 4

2. माना घात 3 का एक बहुपद $f(x)$ इस प्रकार है कि $f(-1) = 10$, $f(1) = -6$, $f(x)$ का एक क्रांतिक बिन्दु $x = -1$ है तथा $f'(x)$ का एक क्रांतिक बिन्दु $x = 1$ है। तो $f(x)$ का एक स्थानीय निम्ननिष्ठ है $x =$ _____.

3. माना एक फलन $f : [0, 5] \to \mathbf{R}$ संतत है, $f(1) = 3$ है तथा F, $F(x)=\int_1^x t^2 g(t)\,dt$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ $g(t)=\int_1^t f(u)\,du$ है, तो फलन F के लिए, बिन्दु $x = 1$ एक :

(1) स्थानीय निम्ननिष्ठ बिन्दु है

(2) क्रांतिक बिन्दु नहीं है

(3) नति परिवर्तन (inflection) बिन्दु है

(4) स्थानीय उच्चिष्ठ बिन्दु है

4. एक 10 cm त्रिज्या वाली गोलाकार लोहे की गेंद को बर्फ की एक समान मोटाई वाली परत से लेप किया गया है, जो कि 50 cm^3/min की दर से पिघलती है। जब बर्फ की परत की मोटाई 5 cm है, उस समय बर्फ की मोटाई के घटने की दर (cm/min में), है :

(1) $\frac{1}{36\pi}$ (2) $\frac{5}{6\pi}$

(3) $\frac{1}{18\pi}$ (4) $\frac{1}{54\pi}$

5. माना P(h, k) वक्र $y = x^2 + 7x + 2$ पर स्थित एक बिन्दु है, जो कि रेखा $y = 3x – 3$ के निकटतम है, तो बिन्दु P पर वक्र के अभिलंब का समीकरण है :

(1) x + 3y – 62 = 0 (2) x – 3y – 11 = 0

(3) x – 3y + 22 = 0 (4) x + 3y + 26 = 0

6. यदि p(x) घात तीन का एक ऐसा बहुपद है, जिसका स्थानीय अधिकतम मान 8, x = 1 पर है तथा स्थानीय न्यूनतम मान 4, x = 2 पर है, तो p(0) बराबर है :

(1) 12 (2) –24

(3) 6 (4) –12

7. माना f(x), घात 4 का एक बहुपद है जिसके क्रान्तिक बिन्दु –1, 0, 1 हैं। यदि $T = \{x \in R | f(x) = f(0)\}$, तो T के सभी अवयवों के वर्गों का योगफल है :

(1) 6 (2) 8 (3) 4 (4) 2

8. यदि x = 1 फलन $f(x) = (3x^2 + ax – 2 – a)\,e^x$ का एक क्रांतिक बिन्दु (critical point) है, तो :

(1) x = 1, f का एक स्थानीय निम्नतम बिन्दु है तथा $x = -\frac{2}{3}$, f का एक स्थानीय उच्चतम बिन्दु है।

(2) x = 1, f का एक स्थानीय उच्चतम बिन्दु है तथा $x = -\frac{2}{3}$, f का एक स्थानीय निम्नतम बिन्दु है।

(3) x = 1 तथा $x = -\frac{2}{3}$, f के स्थानीय निम्नतम बिन्दु हैं।

(4) x = 1 तथा $x = -\frac{2}{3}$ के स्थानीय उच्चतम बिन्दु हैं।

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Vee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Maxima & Minima.p65

9. माना AD तथा BC क्षैतिज समतल भूमि पर क्रमशः A तथा B पर सीधे खड़े दो खम्भे हैं। यदि AD = 8 मी., BC = 11 मी. तथा AB = 10 मी. है, तो AB पर स्थित एक बिंदु M की, बिंदु A से वह दूरी (मीटरों में) जिसके लिए $MD^2 + MC^2$ का मान न्यूनतम है, है _____.

10. λ के सभी वास्तविक मानों, जिनके लिए फलन $f(x) = (1 - \cos^2 x).(\lambda + \sin x)$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, का केवल एक उच्चिष्ठ (maxima) तथा केवल एक निम्निष्ठ (minima) है, का समुच्चय है :

(1) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \{0\}$ (2) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(3) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (4) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) - \{0\}$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Mathamatics\Hindi\Maxima & Minima.p65"

SOLUTION

1. NTA Ans. (2)

Sol. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2+\frac{f(x)}{x^3}\right)=4$

$\Rightarrow f(x) = 2x^3 + ax^4 + bx^5$

$f'(x) = 6x^2 + 4ax^3 + 5bx^4$

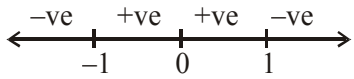
$f'(1) = 0, f'(-1) = 0$

$a = 0, b = \frac{-6}{5} \Rightarrow f(x) = 2x^3 - \frac{6}{5}x^5$

$f'(x) = 6x^2 - 6x^4$

$= 6x^2(1 - x)(1 + x)$

Sign scheme for f'(x)



Minima at $x = -1$

Maxima at $x = 1$

2. NTA Ans. (3)

Sol. $f''(x) = \lambda(x - 1)$

$f'(x) = \frac{\lambda x^2}{2} - \lambda x + C \Rightarrow f'(-1) = 0 \Rightarrow c = \frac{-3\lambda}{2}$

$f(x) = \frac{\lambda x^3}{6} - \frac{\lambda x^2}{2} - \frac{3\lambda}{2}x + d$

$f(1) = -6 \Rightarrow -11\lambda + 6d = -36$ ...(i)

$f(-1) = 10 \Rightarrow 5\lambda + 6d = 60$ ...(ii)

from (i) & (ii) $\lambda = 6$ & $d = 5$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

Which has minima at $x = 3$

Ans. 3.00

3. NTA Ans. (1)

Sol. $F'(x) = x^2 g(x) = x^2\int_1^x f(u)\,du \Rightarrow F'(1) = 0$

$F''(x) = x^2 f(x) - 2x\int_1^x f(u)\,du$

$F''(1) = 1.f(1) - 2 \times 0$

$F''(1) = 3$

$F'(1) = 0$ and $F''(1) = 3 > 0$ So, Minima

4. NTA Ans. (3)

Sol. Let thickness of ice be 'h'.

Vol. of ice = $v = \frac{4\pi}{3}\left((10+h)^3 - 10^3\right)$

$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{3}\left(3(10+h)^2\right).\frac{dh}{dt}$

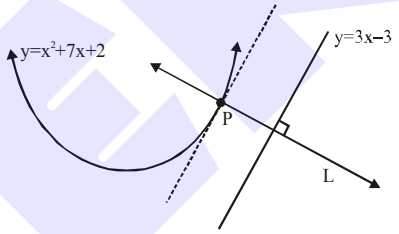
Given $\frac{dv}{dt} = 50\text{cm}^3/\text{min}$ and $h = 5\text{cm}$

$\Rightarrow 50 = \frac{4\pi}{3}\left(3(10+5)^2\right)\frac{dh}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{50}{4\pi\times 15^2} = \frac{1}{18\pi}\text{ cm/min}$

5. Official Ans. by NTA (4)

Sol.



Let L be the common normal to parabola $y = x^2 + 7x + 2$ and line $y = 3x - 3$

$\Rightarrow$ slope of tangent of $y = x^2 + 7x + 2$ at P = 3

$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right]_{\text{For P}} = 3$

$\Rightarrow 2x + 7 = 3 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = -8$

So P(–2, –8)

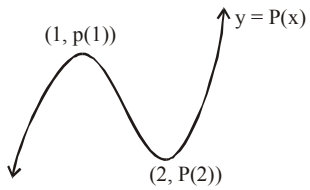
Normal at P : $x + 3y + C = 0$

$\Rightarrow C = 26$ (P satisfies the line)

$\boxed{\text{Normal}: x + 3y + 26 = 0}$

6. Official Ans. by NTA (4)

Sol. Since p(x) has realtive extreme at



$x = 1$ & 2

so $p'(x) = 0$ at $x = 1$ & 2

node06\B0BA-BB\Kota\JEE\MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Maxima & Minima.p65"

$\Rightarrow p'(x) = A(x-1)(x-2)$

$\Rightarrow p(x) = \int A(x^2-3x+2)dx$

$p(x) = A\left(\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right)+C \quad \ldots(1)$

$P(1) = 8$

From (1)

$8 = A\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)+C$

$\Rightarrow 8 = \frac{5A}{6}+C \Rightarrow \boxed{48 = 5A+6C} \quad \ldots(3)$

$P(2) = 4$

$\Rightarrow 4 = A\left(\frac{8}{3}-6+4\right)+C$

$\Rightarrow 4 = \frac{2A}{3}+C \Rightarrow \boxed{12 = 2A+3C} \quad \ldots(4)$

From 3 & 4, $C = -12$

So $P(0) = C = \boxed{-12}$

7. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f'(x) = x(x+1)(x-1) = x^3 - x$

$\int df(x) = \int x^3 - x\,dx$

$f(x) = \frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+C$

$f(x) = f(0)$

$\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2} = 0$

$x^2(x^2-2) = 0$

$x = 0, 0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 + 2 + 2 = 4$

8. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $f(x) = (3x^2 + ax - 2 - a)e^x$

$f'(x) = (3x^2 + ax - 2 - a)e^x + e^x(6x + a)$

$= e^x(3x^2 + x(6 + a) - 2)$

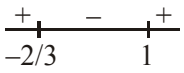
$f'(x) = 0$ at $x = 1$

$\Rightarrow 3 + (6 + a) - 2 = 0$

$a = -7$

$f'(x) = e^x(3x^2 - x - 2)$

$= e^x(x-1)(3x+2)$

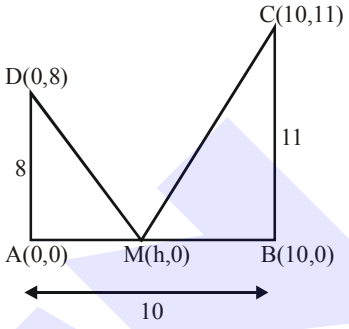


$x = 1$ is point of local minima

$x = \frac{-2}{3}$ is point of local maxima

9. Official Ans. by NTA (5.00)

Sol.



$(MD)^2 + (MC)^2 = h^2 + 64 + (h-10)^2 + 121$

$= 2h^2 - 20h + 64 + 100 + 121$

$= 2(h^2 - 10h) + 285$

$= 2(h-5)^2 + 235$

it is minimum if $h = 5$

10. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $f(x) = (1 - \cos^2 x)(\lambda + \sin x) \quad x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) = \lambda\sin^2 x + \sin^3 x$

$f'(x) = 2\lambda\sin x\cos x + 3\sin^2 x\cos x$

$f'(x) = \sin x\cos x(2\lambda + 3\sin x)$

$\sin x = 0, \ \frac{-2\lambda}{3}, \ (\lambda \neq 0)$

for exactly one maxima & minima

$\frac{-2\lambda}{3} \in (-1, 1) \Rightarrow \lambda \in \left(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\lambda \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) - \{0\}$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Maxima & Minima.p65