HYPERBOLA

1. यदि एक अतिपरवलय बिन्दु P(10,16) से होकर जाता है तथा इसके शीर्ष (±6,0) पर हैं, तो P पर इसके अभिलम्ब का समीकरण है :

(1) x + 2y = 42 (2) 3x + 4y = 94

(3) 2x + 5y = 100 (4) x + 3y = 58

2. यदि e_1 तथा e_2 क्रमशः दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{4}=1$ तथा अतिपरवलय $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ की उत्केंद्रताएँ है तथा (e_1, e_2) दीर्घवृत्त $15x^2 + 3y^2 = k$ पर स्थित एक बिन्दु है, तो k का मान है :

(1) 15 (2) 14

(3) 17 (4) 16

3. सरल रेखा 2x – y = 0 के समानांतर खींची गई एक रेखा अतिपरवलय $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा है, तो $x_1^2+5y_1^2$ का मान है :

(1) 5 (2) 6

(3) 8 (4) 10

4. किसी $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ के लिए, यदि अतिपरवलय $x^2 - y^2\sec^2\theta = 10$ को उत्केन्द्रता, दीर्घवृत्त, $x^2\sec^2\theta + y^2 = 5$ की उत्केन्द्रता का $\sqrt{5}$ गुणा है, तो दीर्घवृत्त की नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई बराबर है –

(1) $\sqrt{30}$ (2) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

(3) $2\sqrt{6}$ (4) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

5. एक अतिपरवलय जिसके अनुप्रस्थ (transverse) अक्ष की लम्बाई $\sqrt{2}$ है , दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ के नाभिकेन्द्रों के बराबर है। तो अतिपरवलय निम्न में से किस बिन्दु से होकर **नहीं** जाता है?

(1) $\left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (2) $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(3) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ (4) $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)$

6. माना अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ पर एक बिन्दु P(3, 3) है। यदि बिन्दु P पर इसका अभिलम्ब x-अक्ष को बिन्दु (9, 0) पर प्रतिच्छेद करता है तथा इसकी उत्केन्द्रता e है, तो क्रमित युग्म (a^2, e^2) होगा

(1) $\left(\frac{9}{2}, 3\right)$ (2) $\left(\frac{9}{2}, 2\right)$

(3) $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ (4) (9, 3)

7. यदि रेखा y = mx + c अतिपरवलय $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{64}=1$ तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 36$ की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा है, तो निम्न में से कौनसा एक सही है ?

(1) 5m = 4 (2) $4c^2 = 369$

(3) $c^2 = 369$ (4) 8m + 5 = 0

SOLUTION

1. NTA Ans. (3)

Sol. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{b^2}=1$

...(i)

P(10,16) lies on (i) get $b^2 = 144$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{144}=1$

Equation of normal is

$\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2e^2$

$2x + 5y = 100$

(3) Option

2. NTA Ans. (4)

Sol. $e_1=\sqrt{1-\frac{4}{18}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$e_2=\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$

$\because$ (e_1, e_2) lies on $15x^2 + 3y^2 = k$

$\Rightarrow 15e_1^2+3e_2^2=k$

$\Rightarrow k = 16$

3. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Slope of tangent is 2, Tangent of hyperbola

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ at the point (x_1, y_1) is

$\frac{xx_1}{4}-\frac{yy_1}{2}=1$ (T = 0)

Slope : $\frac{1}{2}\frac{x_1}{y_1}=2\Rightarrow\boxed{x_1=4y_1}$ …(1)

(x_1, y_1) lies on hyperbola

$\Rightarrow \boxed{\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{2}=1}$ …(2)

From (1) & (2)

$\frac{(4y_1)^2}{4}-\frac{y_1^2}{2}=1\Rightarrow 4y_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1$

$\Rightarrow 7y_1^2=2\Rightarrow\boxed{y_1^2=2/7}$

Now $x_1^2 + 5y_1^2 = (4y_1)^2 + 5y_1^2$

$= (21)y_1^2 = 21 \times \frac{2}{7}=6$

4. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Given $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

equation of hyperbola $\Rightarrow x^2 - y^2\sec^2\theta = 10$

$\Rightarrow \frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{10\cos^2\theta}=1$

Hence eccentricity of hyperbola

$(e_H)=\sqrt{1+\frac{10\cos^2\theta}{10}}$ …(1)

$\left\{e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}\right\}$

Now equation of ellipse $\Rightarrow x^2\sec^2\theta + y^2 = 5$

$\Rightarrow \frac{x^2}{5\cos^2\theta}+\frac{y^2}{5}=1$ $\left\{e=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}\right\}$

Hence ecenticity of ellipse

$(e_E)=\sqrt{1-\frac{5\cos^2\theta}{5}}$

$(e_E)=\sqrt{1-\cos^2\theta}=|\sin\theta|=\sin\theta$ …(2)

$\left\{\because\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

given $\Rightarrow e_H = \sqrt{5}\,e_e$

Hence $1 + \cos^2\theta = 5\sin^2\theta$

$1 + \cos^2\theta = 5(1 - \cos^2\theta)$

$1 + \cos^2\theta = 5 - 5\cos^2\theta$

$6\cos^2\theta = 4$

$\cos^2\theta = \frac{2}{3}$ …(3)

Now length of latus rectum of ellipse

$=\frac{2a^2}{b}=\frac{10\cos^2\theta}{\sqrt{5}}=\frac{20}{3\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$

5. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Ellipse : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

eccentricity = $\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ foci = (±1, 0)

for hyperbola, given 2a = $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ a = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ hyperbola will be

$\frac{x^2}{1/2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

eccentricity = $\sqrt{1+2b^2}$

$\therefore$ foci = $\left(\pm\sqrt{\frac{1+2b^2}{2}}, 0\right)$

$\because$ Ellipse and hyperbola have same foci

$\Rightarrow \sqrt{\frac{1+2b^2}{2}}=1$

$\Rightarrow b^2=\frac{1}{2}$

$\therefore$ Equation of hyperbola : $\frac{x^2}{1/2}-\frac{y^2}{1/2}=1$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$

Clearly $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ does not lie on it.

6. Official Ans. by NTA (1)

Sol. Since, (3, 3) lies on $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{9}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$

....(1)

Now, normal at (3, 3) is $y-3=-\frac{a^2}{b^2}(x-3)$,

which passes through (9, 0) $\Rightarrow$ $b^2 = 2a^2$

....(2)

So, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 3$

Also, $a^2 = \frac{9}{2}$ (from (i) & (ii))

Thus, $(a^2, e^2) = \left(\frac{9}{2}, 3\right)$

7. Official Ans. by NTA (2)

Sol. y = mx + c is tangent to

$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{64}=1$ and $x^2 + y^2 = 36$

$c^2 = 100\,m^2 - 64 \mid c^2 = 36\,(1 + m^2)$

$\Rightarrow 100\,m^2 - 64 = 36 + 36m^2$

$m^2 = \frac{100}{64} \Rightarrow m = \pm\frac{10}{8}$

$c^2 = 36\left(1+\frac{100}{64}\right) = \frac{36\times164}{64}$

$4c^2 = 369$