ELLIPSE

1. यदि किसी $a \in R$, के लिए दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1$ की एक स्पर्श रेखा $3x + 4y = 12\sqrt{2}$ है, तो दीर्घवृत्त की नाभियों के बीच की दूरी है :

(1) 4 (2) $2\sqrt{7}$

(3) $2\sqrt{5}$ (4) $2\sqrt{2}$

2. यदि एक दीर्घवृत्त की नाभियों के बीच की दूरी 6 है तथा इसकी नियताओं के बीच की दूरी 12 है, तो इसकी नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई है:

(1) $\sqrt{3}$ (2) $2\sqrt{3}$

(3) $3\sqrt{2}$ (4) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

3. माना रेखा $y = mx$ तथा दीर्घवृत $2x^2 + y^2 = 1$, प्रथम चतुर्थांश में स्थित एक बिंदु P पर काटते हैं। यदि इस दीर्घवृत्त का P पर अभिलंब, निर्देशांक अक्षों को क्रमश: $\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}},0\right)$ तथा $(0,\beta)$ पर मिलता है, तो β का मान है :

(1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

4. मानक रूप में एक दीर्घवृत्त के लघु अक्ष (y-अक्ष के अनुदिश) की लम्बाई $\frac{4}{\sqrt{3}}$ है यदि यह दीर्घवृत्त, रेखा $x + 6y = 8$ को स्पर्श करता है, तो इसकी उत्केन्द्रता है :

(1) $\sqrt{\frac{5}{6}}$ (2) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$

(3) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{11}{3}}$ (4) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$

5. माना दीर्घवृत्त, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1(b<5)$ तथा अतिपरवलय $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की उत्केन्द्रताएँ क्रमश: e_1 तथा e_2 है और $e_1e_2 = 1$ है। यदि दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के नाभिकेन्द्रों के बीच की दूरीयाँ क्रमश: α तथा β हैं, तो क्रमित युग्म (α, β) बराबर है :

(1) (8, 10) (2) (8, 12)

(3) $\left(\frac{20}{3},12\right)$ (4) $\left(\frac{24}{5},10\right)$

6. माना $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$ एक दीर्घवृत्त दिया गया है जिसके नाभिलम्ब की लम्बाई 10 है। यदि इसकी उत्केन्द्रता, फलन $\phi(t) = \frac{5}{12} + t - t^2$ का अधिकतम मान हो, तो $a^2 + b^2$ का मान होगा

(1) 126 (2) 135
(3) 145 (4) 116

7. माना $x = 4$ एक ऐसे दीर्घवृत की एक नियता है, जिसका केन्द्र मूल बिंदु पर है तथा जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{1}{2}$ है, यदि $P(1, \beta)$, $\beta > 0$ इस दीर्घवृत्त पर स्थित एक बिंदु है, तो इसके P पर खींचे गए अभिलंब का समीकरण है :

(1) $7x - 4y = 1$ (2) $4x - 2y = 1$
(3) $4x - 3y = 2$ (4) $8x - 2y = 5$

8. यदि वक्र $4x^2 + 5y^2 = 20$ पर बिन्दु P, बिन्दु $Q(0, -4)$ से अधिकतम दूरी पर है, तो PQ^2 बराबर है :

(1) 21 (2) 36

(3) 48 (4) 29

9. यदि दो बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमश: $\left(\sqrt{7},0\right)$ तथा $\left(-\sqrt{7},0\right)$ हैं और शांकव (conic) $9x^2 + 16y^2 = 144$ पर कोई बिन्दु P है, तो PA + PB बराबर है :

(1) 8 (2) 6

(3) 16 (4) 9

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics Hindi\Ellipse.p65

10. निम्न में से कौन सा बिंदु, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ की किसी भी स्पर्श रेखा पर इसकी किसी एक नाभि से खींचे गए लंब के पाद के बिंदु पथ पर स्थित है ?

(1) $\left(-1,\sqrt{3}\right)$ (2) $\left(-1,\sqrt{2}\right)$

(3) $\left(-2,\sqrt{3}\right)$ (4) (1,2)

11. यदि एक दीर्घवृत्त की नाभिलम्ब जीवा के एक किनारे पर अभिलम्ब लघु अक्ष केएक शीर्ष से होकर जाता है, तो दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता e सन्तुष्ट करती है :

(1) $e^2 + 2e - 1 = 0$ (2) $e^2 + e - 1 = 0$

(3) $e^4 + 2e^2 - 1 = 0$ (4) $e^4 + e^2 - 1 = 0$

ALLEN

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Mathamatics\Hindi\Ellipse.p65"

SOLUTION

1. NTA Ans. (2)

Sol. $3x + 4y = 12\sqrt{12}$ is tangent to $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1$

$c^2 = m^2a^2 + b^2$

$\Rightarrow a^2 = 16$

$e = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

Distance between focii = 2ae = $2\sqrt{7}$

2. NTA Ans. (3)

Sol. Given $2ae = 6 \Rightarrow \boxed{ae = 3}$ .....(1)

and $\frac{2a}{e} = 12 \Rightarrow \boxed{a = 6e}$ ....(2)

from (1) and (2)

$6e^2 = 3 \Rightarrow \boxed{e = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\Rightarrow \boxed{a = 3\sqrt{2}}$

Now, $b^2 = a^2 (1 - e^2)$

$\Rightarrow b^2 = 18\left(1-\frac{1}{2}\right) = 9$

Length of L.R = $\frac{2(9)}{3\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

3. NTA Ans. (4)

Sol. Any normal to the ellipse is

$$\frac{x\sec\theta}{\sqrt{2}} - y\,\mathrm{cosec}\,\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\left(\frac{-\cos\theta}{\sqrt{2}}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{\sin\theta}{2}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \text{ and } \frac{\sin\theta}{2} = \beta$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

4. NTA Ans. (2)

Sol. Let $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; a > b;

$2b = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3}$

tangent $y = \frac{-x}{6}+\frac{4}{3}$ compare with

$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$\Rightarrow m = \frac{-1}{6} \Rightarrow \sqrt{\frac{a^2}{36}+\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 4;$

$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$

5. Official Ans. by NTA (1)

Sol. For ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (b < 5)

Let e_1 is eccentricity of ellipse

$\therefore b^2 = 25 (1 - e_1^2)$

..... (1)

Again for hyperbola

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Let e_2 is eccentricity of hyperbola.

$\therefore b^2 = 16(e_2^2 - 1)$

..... (2)

by (1) & (2)

$25(1 - e_1^2) = 16(e_2^2 - 1)$

Now $e_1.e_2 = 1$ (given)

$\therefore 25(1 - e_1^2) = 16\left(\frac{1-e_1^2}{e_1^2}\right)$

or $e_1 = \frac{4}{5}$ $\therefore e_2 = \frac{5}{4}$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics Hindi\Ellipse.p65

Now distance between foci is 2ae

$\therefore$ distance for ellipse = $2 \times 5 \times \frac{4}{5} = 8 = \alpha$

distance for hyperbola = $2 \times 4 \times \frac{5}{4} = 10 = \beta$

$\therefore (\alpha, \beta) \equiv (8, 10)$

6. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$; $\frac{2b^2}{a}=10 \Rightarrow b^2 = 5a$ ...(i)

Now, $\phi(t)=\frac{5}{12}+t-t^2=\frac{8}{12}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2$

$\phi(t)_{max}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}=e \Rightarrow e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{9}$

... (ii)

$\Rightarrow a^2 = 81$ (from (i) & (ii))

So, $a^2 + b^2 = 81 + 45 = 126$

7. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Ellipse : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

directrix : $x = \frac{a}{e}=4$ & $e = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow a = 2$ & $b^2 = a^2 (1-e^2) = 3$

$\Rightarrow$ Ellipse is $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

P is $\left(1,\frac{3}{2}\right)$

Normal is : $\frac{4x}{1}-\frac{3y}{3/2}=4-3$

$\Rightarrow 4x - 2y = 1$

8. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Given ellipse is $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$

Let point P is $(\sqrt{5}\cos\theta, 2\sin\theta)$

$(PQ)^2 = 5\cos^2\theta + 4(\sin\theta + 2)^2$

$(PQ)^2 = \cos^2\theta + 16\sin\theta + 20$

$(PQ)^2 = -\sin^2\theta + 16\sin\theta + 21$

$= 85 - (\sin\theta - 8)^2$

will be maximum when $\sin\theta = 1$

$\Rightarrow (PQ)^2_{max} = 85 - 49 = 36$

9. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

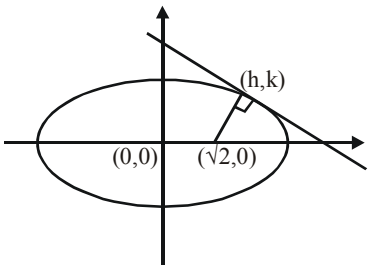
$a = 4;\ b = 3;\ e = \sqrt{\frac{16-9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

A and B are foci

$\Rightarrow PA + PB = 2a = 2 \times 4 = 8$

10. Official Ans. by NTA (1)

Sol. Let foot of perpendicular is (h,k)



$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ (Given)

$a = 2$, $b = \sqrt{2}$, $e = \sqrt{1-\frac{2}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ Focus $(ae,0) = \left(\sqrt{2},0\right)$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Mathamatics\Hindi\Ellipse.p65

Equation of tangent

$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$y = mx + \sqrt{4m^2 + 2}$

Passes throguh (h,k)

$(k - mh)^2 = 4m^2 + 2$ ...(1)

line perpendicular to tangent will have slope

$-\frac{1}{m}$

$y - 0 = -\frac{1}{m}\left(x - \sqrt{2}\right)$

$my = -x + \sqrt{2}$

$(h + mk)^2 = 2$ ...(2)

Add equaiton (1) and (2)

$k^2(1 + m^2) + h^2(1 + m^2) = 4(1 + m^2)$

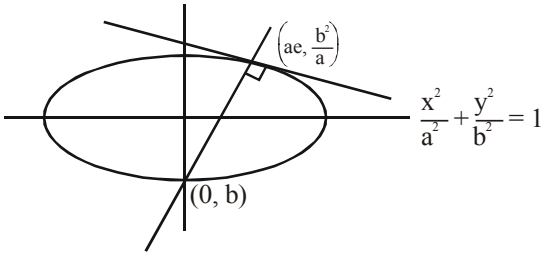
$h^2 + k^2 = 4$

$x^2 + y^2 = 4$ (Auxilary circle)

$\therefore \left(-1, \sqrt{3}\right)$ lies on the locus.

11. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2e^2$



$\frac{a^2x}{ae} - \frac{b^2y}{b^2}.a = a^2e^2$

$\frac{ax}{e} - ay = a^2e^2 \Rightarrow \frac{x}{e} - y = ae^2$

passes through (0, b)

$-b = ae^2 \Rightarrow b^2 = a^2e^4$

$a^2(1 - e^2) = a^2e^4 \Rightarrow e^4 + e^2 = 1$

node06\B0BA-BB\Kota\JEE MAIN\Jee Main-2020_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Ellipse.p65"