

DETERMINANT

1. यदि रैखिक समीकरण निकाय

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 10 \\ 3x + 2y + \lambda z &= \mu \end{aligned}$$

के दो से अधिक हल हैं, तो $\mu - \lambda^2$ बराबर है _____

2. यदि निम्न रैखिक समीकरण निकाय

$$\begin{aligned} 2x + 2ay + az &= 0 \\ 2x + 3by + bz &= 0 \\ 2x + 4cy + cz &= 0, \end{aligned}$$

जहाँ $a, b, c \in \mathbb{R}$ विभिन्न शून्येतर वास्तविक संख्याएँ हैं; का एक शून्येतर हल है, तो:

- (1) a, b, c समान्तर श्रेढी में है
- (2) $a + b + c = 0$
- (3) a, b, c गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

- (4) $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ समान्तर श्रेढी में है।

3. रैखिक समीकरण निकाय

$$\begin{aligned} \lambda x + 2y + 2z &= 5 \\ 2\lambda x + 3y + 5z &= 8 \\ 4x + \lambda y + 6z &= 10 \end{aligned}$$

- (1) के अनन्त हल हैं जब $\lambda = 2$
- (2) का मात्र एक हल है जब $\lambda = -8$
- (3) का कोई हल नहीं है जब $\lambda = 8$
- (4) का कोई हल नहीं है जब $\lambda = 2$

4. निम्न में से किस क्रमित युग्म
- (μ, δ)
- के लिए रैखिक समीकरण निकाय

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 3x + 4y + 5z &= \mu \\ 4x + 4y + 4z &= \delta \end{aligned}$$

असंगत (inconsistent) है?

- (1) (1, 0) (2) (4, 6)
- (3) (3, 4) (4) (4, 3)

5. माना
- $a - 2b + c = 1$
- है। यदि

$$f(x) = \begin{vmatrix} x+a & x+2 & x+1 \\ x+b & x+3 & x+2 \\ x+c & x+4 & x+3 \end{vmatrix} \text{ है, तो :}$$

- (1) $f(-50) = 501$
- (2) $f(-50) = -1$
- (3) $f(50) = 1$
- (4) $f(50) = -501$

6. रैखिक समीकरणों के निम्न निकाय

$$\begin{aligned} 7x + 6y - 2z &= 0 \\ 3x + 4y + 2z &= 0 \\ x - 2y - 6z &= 0 \end{aligned}$$

- (1) $x = 2z$ को सन्तुष्ट करने वाले अनन्त हल (x, y, z) हैं।
- (2) का कोई हल नहीं है
- (3) का केवल तुच्छ हल है
- (4) $y = 2z$ को सन्तुष्ट करने वाले अनन्त हल (x, y, z) हैं।

7. माना S, ऐसे सभी
- $\lambda \in \mathbb{R}$
- का समुच्चय है, जिनके लिए रैखिक समीकरण निकाय

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 2 \\ x - 2y + \lambda z &= -4 \\ x + \lambda y + z &= 4 \end{aligned}$$

का कोई हल नहीं है, तो समुच्चय S

- (1) में दो से अधिक अवयव है।
- (2) एक एकल अवयव वाला समुच्चय है।
- (3) में मात्र दो अवयव हैं।
- (4) एक रिक्त समुच्चय है।

8. यदि समीकरण निकाय

$$\begin{aligned} x - 2y + 5z &= 0 \\ -2x + 4y + z &= 0 \\ -7x + 14y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

के पूर्णाकीय हलों (x, y, z) का समुच्चय S है, जिनके लिए $15 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 150$; तो S के अवयवों की संख्या है _____।

9. यदि
- $\Delta = \begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ 2x-3 & 3x-4 & 4x-5 \\ 3x-5 & 5x-8 & 10x-17 \end{vmatrix} = Ax^3 + Bx^2$

+ Cx + D है, तो B + C बराबर है:

- (1) -1 (2) 1
- (3) -3 (4) 9

10. यदि समीकरण निकाय

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ 2x + y + z &= b \\ x - 7y + az &= 24, \end{aligned}$$

के अनन्त हल हो, तो $a - b$ का मान होगा

11. यदि समीकरणों के निकाय

$$x + y + z = 2$$

$$2x + 4y - z = 6$$

$$3x + 2y + \lambda z = \mu$$

के अनन्त हल हैं, तो :

(1) $\lambda - 2\mu = -5$

(2) $2\lambda - \mu = 5$

(3) $2\lambda + \mu = 14$

(4) $\lambda + 2\mu = 14$

12. यदि $f(\theta) = \begin{vmatrix} -\sin^2 \theta & -1 - \sin^2 \theta & 1 \\ -\cos^2 \theta & -1 - \cos^2 \theta & 1 \\ 12 & 10 & -2 \end{vmatrix}$ द्वारा

परिभाषित फलन $f: \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ के निम्नतम तथा उच्चतम

मान क्रमशः m तथा M हैं, तो क्रमित युग्म (m, M) बराबर है :

(1) $(0, 4)$ (2) $(-4, 4)$

(3) $(0, 2\sqrt{2})$ (4) $(-4, 0)$

13. माना $\lambda \in \mathbb{R}$. रैखिक समीकरण निकाय

$$2x_1 - 4x_2 + \lambda x_3 = 1$$

$$x_1 - 6x_2 + x_3 = 2$$

$$\lambda x_1 - 10x_2 + 4x_3 = 3$$

असंगत है :

(1) λ के मात्र एक ऋणात्मक मान के लिए।

(2) λ के मात्र एक धनात्मक मान के लिए।

(3) λ के प्रत्येक मान के लिए।

(4) λ के मात्र दो मानों के लिए।

14. यदि रैखिक समीकरण निकाय

$$x + y + 3z = 0$$

$$x + 3y + k^2z = 0$$

$$3x + y + 3z = 0$$

का किसी $k \in \mathbb{R}$, के लिए, एक शून्येतर हल

(x, y, z) है, तो $x + \left(\frac{y}{z}\right)$ बराबर है -

(1) 9 (2) -3

(3) -9 (4) 3

15. यदि $a + x = b + y = c + z + 1$ है, जहाँ a, b, c, x, y, z शून्येतर भिन्न वास्तविक संख्याएँ हैं, तो

$$\begin{vmatrix} x & a+y & x+a \\ y & b+y & y+b \\ z & c+y & z+c \end{vmatrix} \text{ बराबर है :}$$

(1) 0 (2) $y(a - b)$

(3) $y(b - a)$ (4) $y(a - c)$

16. λ तथा μ के क्रमशः मान, जिनके लिए समीकरण निकाय

$$x + y + z = 2$$

$$x + 2y + 3z = 5$$

$$x + 3y + \lambda z = \mu$$

के असंख्य हल हैं, हैं

(1) 5 तथा 7 (2) 6 तथा 8

(3) 4 तथा 9 (4) 5 तथा 8

17. माना m तथा M $\begin{vmatrix} \cos^2 x & 1 + \sin^2 x & \sin 2x \\ 1 + \cos^2 x & \sin^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & \sin^2 x & 1 + \sin 2x \end{vmatrix}$

के, क्रमशः न्यूनतम तथा अधिकतम मान हैं, तो क्रमित युग्म (m, M) बराबर है :

(1) $(-3, -1)$ (2) $(-4, -1)$

(3) $(1, 3)$ (4) $(-3, 3)$

18. λ के उन भिन्न मानों का योग, जिनके लिए समीकरण निकाय

$$(\lambda - 1)x + (3\lambda + 1)y + 2\lambda z = 0$$

$$(\lambda - 1)x + (4\lambda - 2)y + (\lambda + 3)z = 0$$

$$2x + (3\lambda + 1)y + 3(\lambda - 1)z = 0,$$

के शून्येतर (non-zero) हल हैं, है _____.

SOLUTION

1. NTA Ans. (13.00)

Sol. System has infinitely many solution

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 3 \\ \mu & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mu = 14$$

$$\mu - \lambda^2 = 13$$

2. NTA Ans. (4)

Sol. For non-zero solution

$$\begin{vmatrix} 2 & 2a & a \\ 2 & 3b & b \\ 2 & 4c & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2a & a \\ 0 & 3b-2a & b-a \\ 0 & 4c-2a & c-a \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3b - 2a)(c - a) - (b - a)(4c - 2a) = 0$$

$$\Rightarrow 2ac = bc + ab$$

$$\Rightarrow \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \text{ Hence } \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c} \text{ are in A.P.}$$

3. NTA Ans. (4)

Sol. $D = \begin{vmatrix} \lambda & 3 & 2 \\ 2\lambda & 3 & 5 \\ 4 & \lambda & 6 \end{vmatrix} = (\lambda + 8)(2 - \lambda)$

for $\lambda = 2$; $D_1 \neq 0$

Hence, no solution for $\lambda = 2$

(4) Option

4. NTA Ans. (4)

Sol. $2 \times (ii) - 2 \times (i) - (iii) :-$

$$0 = 2\mu - 2 - \delta$$

$$\Rightarrow \delta = 2(\mu - 1)$$

5. NTA Ans. (3)

Sol. $R_1 \rightarrow R_1 + R_3 - 2R_2$

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+c-2b & 0 & 0 \\ x+b & x+3 & x+2 \\ x+c & x+4 & x+3 \end{vmatrix}$$

$$= (a + c - 2b) ((x + 3)^2 - (x + 2)(x + 4))$$

$$= x^2 + 6x + 9 - x^2 - 6x - 8 = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 \Rightarrow f(50) = 1$$

6. NTA Ans. (1)

Sol. $7x + 6y - 2z = 0 \dots (1)$

$$3x + 4y + 2z = 0 \dots (2)$$

$$x - 2y - 6z = 0 \dots (3)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 6 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{infinite solutions}$$

Now (1) + (2) $\Rightarrow y = -x$ put in (1), (2) & (3)

all will lead to $x = 2z$

7. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $2x - y + 2z = 2$

$$x - 2y + \lambda z = -4$$

$$x + \lambda y + z = 4$$

For no solution :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2(-2 - \lambda^2) + 1(1 - \lambda) + 2(\lambda + 2) = 0$$

$$\Rightarrow -2\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, -\frac{1}{2}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & \lambda \\ 4 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(1 + \lambda)$$

which is not equal to zero for

$$\lambda = 1, -\frac{1}{2}$$

8. Official Ans. by NTA (8)

$$\text{Sol. } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -7 & 14 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Let $x = k$

\Rightarrow Put in (1) & (2)

$$k - 2y + 5z = 0$$

$$-2k + 4y + z = 0$$

$$z = 0, y = \frac{k}{2}$$

\therefore x, y, z are integer

$\Rightarrow k$ is even integer

Now $x = k, y = \frac{k}{2}, z = 0$ put in condition

$$15 \leq k^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 + 0 \leq 150$$

$$12 \leq k^2 \leq 120$$

$$\Rightarrow k = \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 10$$

\Rightarrow Number of element in $S = 8$.

9. Official Ans. by NTA (3)

$$\text{Sol. } \Delta = \begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ 2x-3 & 3x-4 & 4x-5 \\ 3x-5 & 5x-8 & 10x-17 \end{vmatrix} = Ax^3 + Bx^2 +$$

Cx + D.

$$R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \quad R_3 \rightarrow R_3 - R_2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-1 & x-1 & x-1 \\ x-2 & 2(x-2) & 6(x-2) \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)(x-2) \begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -3(x-1)^2(x-2) = -3x^3 + 12x^2 - 15x + 6$$

$$\therefore B + C = 12 - 15 = -3$$

10. Official Ans. by NTA (5)

$$\text{Sol. } D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -7 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a = 8$$

$$\text{also, } D_1 = \begin{vmatrix} 9 & -2 & 3 \\ b & 1 & 1 \\ 24 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow b = 3$$

hence, $a - b = 8 - 3 = 5$

11. Official Ans. by NTA (3)

Sol. For infinite solutions

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

$$\text{Now } \Delta = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{9}{2}$$

$$\Delta_{x=0} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \\ \mu & 2 & -\frac{9}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \mu = 5$$

For $\lambda = \frac{9}{2}$ & $\mu = 5$, $\Delta_y = \Delta_z = 0$

Now check option $2\lambda + \mu = 14$

12. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $C_3 \rightarrow C_3 - (C_1 - C_2)$

$$f(\theta) = \begin{vmatrix} -\sin^2 \theta & -1 - \sin^2 \theta & 0 \\ -\cos^2 \theta & -1 - \cos^2 \theta & 0 \\ 12 & 10 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -4[(1 + \cos^2 \theta) \sin^2 \theta - \cos^2 \theta (1 + \sin^2 \theta)]$$

$$= -4[\sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \cos^2 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta]$$

$$f(\theta) = 4 \cos 2\theta$$

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$2\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

$$f(\theta) \in [-4, 0]$$

$$(m, M) = (-4, 0)$$

13. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & \lambda \\ 1 & -6 & 1 \\ \lambda & -10 & 4 \end{vmatrix}$

$$= 2(3\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

$$D_1 = -2(\lambda - 3)$$

$$D_2 = -2(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

$$D_3 = -2(\lambda - 3)$$

When $\lambda = 3$, then

$$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

\Rightarrow Infinite many solution

when $\lambda = -\frac{2}{3}$ then D_1, D_2, D_3 none of them

is zero so equations are inconsistent

$$\therefore \lambda = -\frac{2}{3}$$

14. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $x + y + 3z = 0$ (i)

$x + 3y + k^2z = 0$ (ii)

$3x + y + 3z = 0$ (iii)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & k^2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 9 + 3 + 3k^2 - 27 - k^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 = 9$$

$$(i) - (iii) \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Now from (i) $\Rightarrow y + 3z = 0$

$$\Rightarrow \frac{y}{z} = -3$$

$$x + \frac{y}{z} = -3$$

15. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $a + x = b + y = c + z + 1$

$$\begin{vmatrix} x & a+y & x+a \\ y & b+y & y+b \\ z & c+y & z+c \end{vmatrix} \quad C_3 \rightarrow C_3 - C_1$$

$$\begin{vmatrix} x & a+y & a \\ y & b+y & b \\ z & c+y & c \end{vmatrix} \quad C_2 \rightarrow C_2 - C_3$$

$$\begin{vmatrix} x & y & a \\ y & y & b \\ z & y & c \end{vmatrix} \quad R_3 \rightarrow R_3 - R_1, R_2 \rightarrow R_2 - R_1$$

$$\begin{vmatrix} x & y & a \\ y-x & 0 & b-a \\ z-x & 0 & c-a \end{vmatrix}$$

$$= (-y)[(y-x)(c-a) - (b-a)(z-x)]$$

$$= (-y)[(a-b)(c-a) + (a-b)(a-c-1)]$$

$$= (-y)[(a-b)(c-a) + (a-b)(a-c) + b-a]$$

$$= -y(b-a) = y(a-b)$$

16. Official Ans. by NTA (4)**Sol.** For infinite many solutions

$$D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

$$\text{Now } D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$1 \cdot (2\lambda - 9) - 1 \cdot (\lambda - 3) + 1 \cdot (3 - 2) = 0$$

$$\therefore \lambda = 5$$

$$\text{Now } D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ \mu & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$2(10 - 9) - 1(25 - 3\mu) + 1(15 - 2\mu) = 0$$

$$\mu = 8$$

17. Official Ans. by NTA (1)

$$\text{Sol. } \begin{vmatrix} \cos^2 x & 1 + \sin^2 x & \sin 2x \\ 1 + \cos^2 x & \sin^2 x & \sin 2x \\ \cos^2 x & \sin^2 x & 1 + \sin 2x \end{vmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2, R_2 \rightarrow R_2 - R_3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \cos^2 x & \sin^2 x & 1 + \sin 2x \end{vmatrix}$$

$$= -1(\sin^2 x) - 1(1 + \sin 2x + \cos^2 x)$$

$$= -\sin 2x - 2$$

$$m = -3, M = -1$$

18. Official Ans. by NTA (3.00)

$$\text{Sol. } (\lambda - 1)x + (3\lambda + 1)y + 2\lambda z = 0$$

$$(\lambda - 1)x + (4\lambda - 2)y + (\lambda + 3)z = 0$$

$$2x + (3\lambda + 1)y + (3\lambda - 3)z = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3\lambda + 1 & 2\lambda \\ \lambda - 1 & 4\lambda - 2 & \lambda + 3 \\ 2 & 3\lambda + 1 & 3\lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - R_2 \text{ \& } R_2 \rightarrow R_2 - R_3$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 - \lambda & \lambda - 3 \\ \lambda - 3 & \lambda - 3 & -2(\lambda - 3) \\ 2 & 3\lambda + 1 & 3\lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3\lambda + 1 & 3\lambda - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 3)^2 [(3\lambda + 1) + (3\lambda - 1)] = 0$$

$$6\lambda(\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 3$$

$$\text{Sum} = 3$$