CIRCLE

1. माना मूल बिन्दु से वृत्त $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ पर खींची गई स्पर्श रेखायें इसे बिन्दुओं A तथा B पर स्पर्श करती है। तो $(AB)^2$ बराबर है :

(1) $\frac{52}{5}$ (2) $\frac{32}{5}$

(3) $\frac{56}{5}$ (4) $\frac{64}{5}$

2. यदि एक रेखा $y = mx + c$ वृत्त $(x - 3)^2 + y^2 = 1$ की एक स्पर्श रेखा है तथा यह एक रेखा L_1 पर लम्ब है, जहाँ L_1 वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ के बिन्दु $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ पर स्पर्श रेखा है, तो :

(1) $c^2 - 6c + 7 = 0$ (2) $c^2 + 6c + 7 = 0$

(3) $c^2 + 7c + 6 = 0$ (4) $c^2 - 7c + 6 = 0$

3. यदि वक्र $x^2 - 6x + y^2 + 8 = 0$ तथा $x^2 - 8y + y^2 + 16 - k = 0$, $(k > 0)$ एक दूसरे को एक बिन्दू पर स्पर्श करते हैं, तो k का अधिकतम मान है ______.

4. k के पूर्णाकीय मानों की संख्या, जिनके लिए सरल रेखा $3x + 4y = k$, वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ को दो भिन्न बिन्दुओं पर काटती है, है ______.

5. वृत्त, जिसका केन्द्र प्रथम चतुर्थांश में रेखा $x + y = 2$ पर है तथा जो दोनों रेखाओं $x = 3$ तथा $y = 2$ को स्पर्श करता है, का व्यास है ________ ।

6. वृत्तों $x^2 + y^2 - 6x = 0$ तथा $x^2 + y^2 - 4y = 0$, के प्रतिच्छेदन बिन्दुओं से हो कर जाने वाले वह वृत्त जिसका केन्द्र, रेखा $2x - 3y + 12 = 0$ पर स्थित है, निम्न में से जिस बिंदु से भी हो कर जाता है, वह है :

(1) (1, –3) (2) (–1, 3)

(3) (–3, 1) (4) (–3, 6)

7. माना PQ वृत्त $x^2+y^2=9$ का एक व्यास है। यदि P तथा Q से रेखा $x + y = 2$ पर खींचे गए लंबों की लंबाइयाँ क्रमशः α तथा β हैं, तो $\alpha\beta$ का अधिकतम मान है ____।

8. यदि वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$ की, रेखा $y - 2x = 3$ के अनुदिश, जीवा की लम्बाई r है, तो r^2 बराबर है :

(1) $\frac{9}{5}$ (2) $\frac{12}{5}$

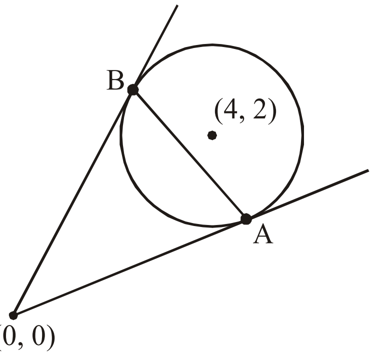
(3) 12 (4) $\frac{24}{5}$

SOLUTION

1. NTA Ans. (4)

Sol. R = $\sqrt{16+4-16}=2$

L = $\sqrt{S_1}=4$



AB(Chord of contact) = $\dfrac{2LR}{\sqrt{L^2+R^2}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$

$(AB)^2 = \dfrac{64}{5}$

2. NTA Ans. (2)

Sol. Slope of tangent to $x^2 + y^2 = 1$ at $P\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow m_T|_P = -1$

$y = mx + c$ is tangent to $(x - 3)^2 + y^2 = 1$

$y = x + c$ is tangent to $(x - 3)^2 + y^2 = 1$

$\left|\dfrac{c+3}{\sqrt{2}}\right| = 1 \Rightarrow c^2 + 6c + 7 = 0$

(2) Option

3. NTA Ans. (36)

Sol. Common tangent is $S_1 - S_2 = 0$

$\Rightarrow -6x + 8y - 8 + k = 0$

Use p = r for I[st] circle

$\Rightarrow \dfrac{|-18-8+k|}{10} = 1$

$\Rightarrow k = 36$ or $16 \Rightarrow k_{max} = 36$

4. Official Ans. by NTA (9.00)

Sol. Circle $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

Centre : (1, 2) radius = 1

line $3x + 4y - k = 0$ intersects the circle at two distinct points.

$\Rightarrow$ distance of centre from the line < radius

$\Rightarrow \left|\dfrac{3\times1+4\times2-k}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| < 1$

$\Rightarrow |11 - k| < 5$

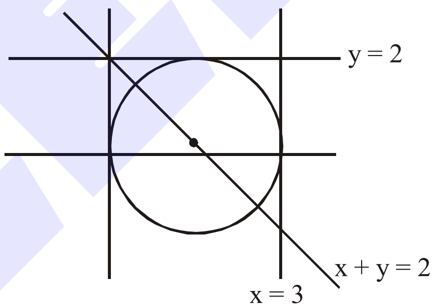
$\Rightarrow 6 < k < 16$

$\Rightarrow k \in \{7, 8, 9, ... 15\}$ since $k \in I$

Number of K is $\boxed{9}$

5. Official Ans. by NTA (3)

Sol.



$\because$ center lies on $x + y = 2$ and in 1st quadrant

center = $(\alpha, 2 - \alpha)$

where $\alpha > 0$ and $2 - \alpha > 0 \Rightarrow 0 < \alpha < 2$

$\because$ circle touches $x = 3$ and $y = 2$

$\Rightarrow |3 - \alpha| = |2 - (2 - \alpha)| =$ radius

$\Rightarrow |3 - \alpha| = |\alpha| \Rightarrow \alpha = \dfrac{3}{2}$

$\therefore$ radius = α

$\Rightarrow$ Diameter = $2\alpha = 3$.

6. Official Ans. by NTA (4)

Sol. Let S be the circle pasing through point of intersection of S_1 & S_2

$\therefore\ S = S_1 + \lambda S_2 = 0$

$\Rightarrow S : (x^2 + y^2 - 6x) + \lambda\ (x^2 + y^2 - 4y) = 0$

$\Rightarrow S : x^2 + y^2 - \left(\frac{6}{1+\lambda}\right)x - \left(\frac{4\lambda}{1+\lambda}\right)\ y = 0$ ...(1)

Centre $\left(\frac{3}{1+\lambda}, \frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$ lies on

$2x - 3y + 12 = 0 \Rightarrow \lambda = -3$

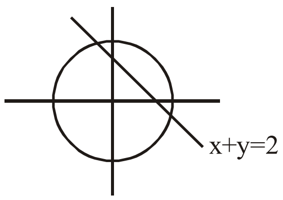
put in (1) $\Rightarrow S : x^2 + y^2 + 3x - 6y = 0$

Now check options point (–3, 6)

lies on S.

7. Official Ans. by NTA (7)

Sol. Let P (3cosθ, 3 sinθ)



Q (–3 cosθ, –3 sinθ)

$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{|(3\cos\theta + 3\sin\theta)^2 - 4|}{2}$

$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{5 + 9\sin 2\theta}{2} \le 7$

8. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Let chord

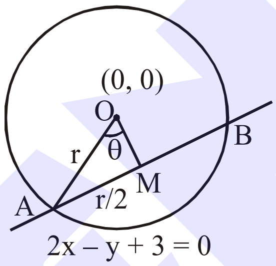
AB = r

$\because \Delta AOM$ is right angled triangle

$\therefore$ OM $= \frac{r\sqrt{3}}{2}$ = perpendicular distance of line

AB from (0,0)

$\frac{r\sqrt{3}}{2} = \left|\frac{3}{\sqrt{5}}\right|$



$r^2 = \frac{12}{5}$