BINOMIAL THEOREM

1. क्रमित युग्मों (r, k), जिनके लिए $6\cdot{}^{35}C_r = (k^2-3)\cdot{}^{36}C_{r+1}$, जहाँ k एक पूर्णांक हैं, की संख्या है :-

(1) 3 (2) 2
(3) 4 (4) 6

2. व्यंजक $(1 + x)^{10} + x(1 + x)^9 + x^2(1 + x)^8 + \ldots + x^{10}$ में x^7 का गुणांक है :

(1) 120 (2) 330
(3) 210 (4) 420

3. यदि गुणनफल $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n})(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{2n})$ में, x के सभी सम-घातों वाले गुणाकों का योगफल 61 है, तो n बराबर है_________।

4. यदि $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^6+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^6$ के प्रसार में x^4 तथा x^2 के गुणांक क्रमशः α तथा β हैं, तो :-

(1) $\alpha + \beta = 60$ (2) $\alpha + \beta = -30$
(3) $\alpha - \beta = -132$ (4) $\alpha - \beta = 60$

5. $\left(\frac{x}{\cos\theta}+\frac{1}{x\sin\theta}\right)^{16}$ के प्रसार में, यदि x से स्वतंत्र पद का निम्नतम मान ℓ_1 है जब $\frac{\pi}{8}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$ तथा x से स्वतंत्र पद का निम्नतम मान ℓ_2 है जब $\frac{\pi}{16}\le\theta\le\frac{\pi}{8}$, तो अनुपात $\ell_2 : \ell_1$ बराबर है :

(1) 1 : 8 (2) 1 : 16
(3) 8 : 1 (4) 16 : 1

6. यदि $C_r \equiv {}^{25}C_r$ तथा $C_0 + 5.C_1 + 9.C_2 + \ldots + (101).C_{25} = 2^{25}.k$, तो k बराबर है _____.

7. $(1 + x + x^2)^{10}$ के प्रसार में x^4 का गुणांक है ______।

8. माना $\alpha > 0$, $\beta > 0$ इस प्रकार हैं कि $\alpha^3 + \beta^2 = 4$ है। यदि $\left(\alpha x^{\frac{1}{9}}+\beta x^{-\frac{1}{6}}\right)^{10}$ के द्विपद प्रसार में x से स्वतंत्र पद का अधिकतम मान 10k है, तो k का मान है :

(1) 176 (2) 336
(3) 352 (4) 84

9. एक घन पूर्णांक n के लिए, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ को x की बढ़ती घातों में प्रसारित किया गया है। यदि इस प्रसार में तीन क्रमागत गुणांकों का अनुपात, 2 : 5 : 12 है, तो n बराबर है –

10. यदि $(3^{1/2} + 5^{1/8})^n$ के प्रसार में पूर्णांकीय पदों की संख्या मात्र 33 है, तो n का न्यूनतम मान है:

(1) 264 (2) 256 (3) 128 (4) 248

11. यदि $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^9$ के विस्तार में, x से स्वतंत्र पद k है, तो 18 k बराबर है :

(1) 9 (2) 11 (3) 5 (4) 7

12. $\sum_{r=0}^{20} {}^{50-r}C_6$ का मान होगा

(1) ${}^{51}C_7 + {}^{30}C_7$ (2) ${}^{51}C_7 - {}^{30}C_7$
(3) ${}^{50}C_7 - {}^{30}C_7$ (4) ${}^{50}C_6 - {}^{30}C_6$

13. माना $(2x^2 + 3x + 4)^{10} = \sum_{r=0}^{20} a_r x^r$ है $\frac{a_7}{a_{13}}$ का मान होगा

14. माना किसी धनपूर्णाक n के लिए, $(1+x)^{n+5}$ के द्विपद प्रसार में तीन क्रमागत पदों के गुणांक 5 : 10 : 14 के अनुपात में हैं, तो इस प्रसार में सब से बड़ा गुणांक है :-

(1) 792 (2) 252 (3) 462 (4) 330

15. प्राकृत संख्या m, जिसके लिए $\left(x^m+\frac{1}{x^2}\right)^{22}$ के द्विपद प्रसार में x का गुणांक 1540 है, है ________।

16. x की घातों में $(1 + x + x^2 + x^3)^6$ के प्रसार में x^4 का गुणांक है ______।

17. यदि {p}, संख्या p के भिन्नात्मक भाग (fractional part) को दर्शाता है, तो $\left\{\frac{3^{200}}{8}\right\}$, बराबर है :

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{5}{8}$ (3) $\frac{3}{8}$ (4) $\frac{7}{8}$

18. यदि $\left(\sqrt{x}-\frac{k}{x^2}\right)^{10}$ के द्विपद प्रसार में अचर में पद 405, है तो |k| बराबर है :

(1) 2 (2) 1 (3) 3 (4) 9

SOLUTION

1. NTA Ans. (3)

Sol. $6 \times {}^{35}C_r = (k^2-3)\,{}^{36}C_{r+1}$

$k^2 - 3 > 0 \;\Rightarrow k^2 > 3$

$k^2 - 3 = \dfrac{6 \times {}^{35}C_r}{{}^{36}C_{r+1}} = \dfrac{r+1}{6}$

Possible values of r for integral values of k, are

$r = 5, 35$

number of ordered pairs are 4

$(5, 2), (5, -2), (35, 3), (35, -3)$

2. NTA Ans. (2)

Sol. Coefficient of x^7 is

${}^{10}C_7 + {}^{9}C_6 + {}^{8}C_5 + \ldots + {}^{4}C_1 + {}^{3}C_0$

$\underbrace{{}^{4}C_0 + {}^{4}C_1}_{{}^{5}C_1} + {}^{5}C_2 + \ldots + {}^{10}C_7 = {}^{11}C_7 = 330$

3. NTA Ans. (30)

Sol. Let $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{2n})(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{2n})$

$= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_{4n}x^{4n}$

So,

$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{4n} = 2n + 1 \qquad \ldots(1)$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots + a_{4n} = 2n + 1 \qquad \ldots(2)$

$\Rightarrow a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{4n} = 2n + 1$

$\Rightarrow 2n + 1 = 61 \qquad \Rightarrow n = 30$

4. NTA Ans. (3)

Sol. $2[{}^{6}C_0x^6 + {}^{6}C_2x^4(x^2-1) + {}^{6}C_4x^2(x^2-1)^2 + {}^{6}C_6(x^2-1)^3]$

$\alpha = -96$ & $\beta = 36$

$\therefore\ \alpha - \beta = -132$

(3) Option

5. NTA Ans. (4)

Sol. $T_{r+1} = {}^{16}C_r \left(\dfrac{x}{\cos\theta}\right)^{16-r}\left(\dfrac{1}{x\sin\theta}\right)^{r}$

$= {}^{16}C_r\,(x)^{16-2r} \times \dfrac{1}{(\cos\theta)^{16-r}(\sin\theta)^{r}}$

For independent of x; $16 - 2r = 0 \Rightarrow r = 8$

$\Rightarrow T_9 = {}^{16}C_8 \dfrac{1}{\cos^8\theta\sin^8\theta}$

$= {}^{16}C_8 \dfrac{2^8}{(\sin 2\theta)^8}$

for $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ ℓ_1 is least for $\theta_1 = \dfrac{\pi}{4}$

for $\theta \in \left[\dfrac{\pi}{16}, \dfrac{\pi}{8}\right]$ ℓ_2 is least for $\theta_2 = \dfrac{\pi}{8}$

$\dfrac{\ell_2}{\ell_1} = \dfrac{(\sin 2\theta_1)^8}{(\sin 2\theta_2)^8} = (\sqrt{2})^8 = \dfrac{16}{1}$

6. NTA Ans. (51)

Sol. $S = 1.{}^{25}C_0 + 5.{}^{25}C_1 + 9.{}^{25}C_2 + \ldots. + (101)\,{}^{25}C_{25}$

$S = 101\,{}^{25}C_{25} + 97\,{}^{25}C_1 + \ldots\ldots\ldots + 1\,{}^{25}C_{25}$

$2S = (102)\,(2^{25})$

$S = 51\,(2^{25})$

7. NTA Ans. (615.00)

Sol. $(1 + x + x^2)^{10}$

$= {}^{10}C_0 + {}^{10}C_1x(1 + x) + {}^{10}C_2x^2(1 + x)^2$

$+ {}^{10}C_3x^3(1 + x)^3 + {}^{10}C_4x^4(1 + x)^4 + \ldots\ldots.$

Coeff. of $x^4 = {}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 \times {}^{3}C_1 + {}^{10}C_4 = 615.$

8. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Let t_{r+1} denotes

$r+1^{th}$ term of $\left(\alpha x^{\frac{1}{9}}+\beta x^{-\frac{1}{6}}\right)^{10}$

$$t_{r+1}={}^{10}C_r\alpha^{10-r}(x)^{\frac{10-r}{9}}.\beta^r x^{-\frac{r}{6}}$$

$$={}^{10}C_r\,\alpha^{10-r}\,\beta^r\,(x)^{\frac{10-r}{9}-\frac{r}{6}}$$

If t_{r+1} is independent of x

$$\frac{10-r}{9}-\frac{r}{6}=0 \quad\Rightarrow\quad r=4$$

maximum value of t_5 is 10 K (given)

$\Rightarrow\ {}^{10}C_4\,\alpha^6\,\beta^4$ is maximum

By AM $\geq$ GM (for positive numbers)

$$\frac{\frac{\alpha^3}{2}+\frac{\alpha^3}{2}+\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^2}{2}}{4}\geq\left(\frac{\alpha^6\beta^4}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$\Rightarrow \boxed{\alpha^6\beta^4\leq16}$

So, $10\text{ K} = {}^{10}C_4 16$

$\Rightarrow$ K = 336

9. Official Ans. by NTA (118)

Sol. ${}^nC_{r-1} : {}^nC_r : {}^nC_{r+1} = 2:5:12$

Now $\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r}=\frac{2}{5}$

$\Rightarrow 7r = 2n + 2$ ...(1)

$$\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r+1}}=\frac{5}{12}$$

$\Rightarrow 17r = 5n - 12$ ...(2)

On solving (1) & (2)

$\Rightarrow$ n = 118

10. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $T_{r+1}={}^nC_r(3)^{\frac{n-r}{2}}(5)^{\frac{r}{8}}$ $(n \geq r)$

Clearly r should be a multiple of 8.

$\because$ there are exactly 33 integral terms

Possible values of r can be

0, 8, 16, ..., 32×8

$\therefore$ least value of n = 256.

11. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $T_{r+1}={}^9C_r\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{9-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r$

$$T_{r+1}={}^9C_r\left(\frac{3}{2}\right)^{9-r}\left(-\frac{1}{3}\right)^r x^{18-3r}$$

For independent of x

18 – 3r = 0, r = 6

$$\therefore\ T_7={}^9C_6\left(\frac{3}{2}\right)^3\left(-\frac{1}{3}\right)^6=\frac{21}{54}=k$$

$$\therefore\ 18k=\frac{21}{54}\times18=7$$

12. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $\sum\limits_{r=0}^{20}{}^{50-r}C_6={}^{50}C_6+{}^{49}C_6+{}^{48}C_6+.....+{}^{30}C_6$

$$={}^{50}C_6+{}^{49}C_6+.....+{}^{31}C_6+\left({}^{30}C_6+{}^{30}C_7\right)-{}^{30}C_7$$

$$={}^{50}C_6+{}^{49}C_6+.....+\left({}^{31}C_6+{}^{31}C_7\right)-{}^{30}C_7$$

$$={}^{50}C_6+{}^{50}C_7-{}^{30}C_7$$

$$={}^{51}C_7-{}^{30}C_7$$

$$\boxed{{}^nC_r+{}^nC_{r-1}={}^{n+1}C_r}$$

13. Official Ans. by NTA (8)

Sol. Given $(2x^2 + 3x + 4)^{10}=\sum\limits_{r=0}^{20}a_r\,x^r$ .... (1)

replace x by $\frac{2}{x}$ in above identity :-

$$\frac{2^{10}\left(2x^2+3x+4\right)^{10}}{x^{20}}=\sum_{r=0}^{20}\frac{a_r\,2^r}{x^r}$$

$$\Rightarrow 2^{10}\sum_{r=0}^{20}a_r\,x^r=\sum_{r=0}^{20}a_r\,2^r\,x^{(20-r)}\ (\text{from (i)})$$

now, comparing coefficient of x^7 from both sides

(take r = 7 in L.H.S. & r = 13 in R.H.S.)

$$2^{10}\,a_7=a_{13}\,2^{13}\Rightarrow\frac{a_7}{a_{13}}=2^3=8$$

14. Official Ans. by NTA (3)

Sol. Let n + 5 = N

$$^{N}C_{r-1} : {}^{N}C_{r} : {}^{N}C_{r+1} = 5 : 10 : 14$$

$$\Rightarrow \frac{^{N}C_{r}}{^{N}C_{r-1}} = \frac{N+1-r}{r} = 2$$

$$\frac{^{N}C_{r+1}}{^{N}C_{r}} = \frac{N-r}{r+1} = \frac{7}{5}$$

$\Rightarrow r = 4,\ N = 11$

$\Rightarrow (1 + x)^{11}$

Largest coefficient = ${}^{11}C_6 = 462$

15. Official Ans. by NTA (13)

Sol. $T_{r+1} = {}^{22}C_r (x^m)^{22-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r = {}^{22}C_r x^{22m-mr-2r}$

$= {}^{22}C_r\ x$

$\because {}^{22}C_3 = {}^{22}C_{19} = 1540$

$\therefore r = 3$ or 19

$22m - mr - 2r = 1$

$$m = \frac{2r+1}{22-5}$$

$$r = 3,\ \ m = \frac{7}{19} \notin N$$

$$r = 19,\ \ m = \frac{38+1}{22-19} = \frac{39}{3} = 13$$

$m = 13$

16. Official Ans. by NTA (120.00)

Sol. $(1 + x + x^2 + x^3)^6 = \left((1+x)(1+x^2)\right)^6$

$= (1 + x)^6\ (1 + x^2)^6$

$$= \sum_{r=0}^{6} {}^6C_r x^r \sum_{r=0}^{6} {}^6C_t x^{2t}$$

$$= \sum_{r=0}^{6} \sum_{t=0}^{6} {}^6C_r\, {}^6C_t\, x^{r+2t}$$

For coefficient of $x^4 \Rightarrow r + 2t = 4$

r	t
0	2
2	1
4	0

Coefficient of x^4

$= {}^6C_0\ {}^6C_2 + {}^6C_2\ {}^6C_1 + {}^6C_4\ {}^6C_0$

$= 120$

17. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $$\left\{\frac{3^{200}}{8}\right\} = \left\{\frac{(3^2)^{100}}{8}\right\} = \left\{\frac{(1+8)^{100}}{8}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1 + {}^{100}C_1 .8 + {}^{100}C_2 .8^2 + \ldots + {}^{100}C_{100} 8^{100}}{8}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1+8m}{8}\right\} = \frac{1}{8}$$

18. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $$\left(\sqrt{x} - \frac{k}{x^2}\right)^{10}$$

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r \left(\sqrt{x}\right)^{10-r}\left(\frac{-k}{x^2}\right)^r$$

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r . x^{\frac{10-r}{2}} . (-k)^r . x^{-2r}$$

$$T_{r+1} = {}^{10}C_r x^{\frac{10-5r}{2}} (-k)^r$$

Constant term : $\frac{10-5r}{2} = 0 \Rightarrow r = 2$

$T_3 = {}^{10}C_2 .(-k)^2 = 405$

$$k^2 = \frac{405}{45} = 9$$

$k = \pm 3 \Rightarrow |k| = 3$