GRAVITATION

1. एक उपग्रह को पृथ्वी की सतह से ऊँचाई h तक लाने में E_1 ऊर्जा लगती है तथा इस उपग्रह को इस ऊँचाई की वृत्ताकार कक्षा में रखने के लिए E_2 ऊर्जा की आवश्यकता होती है। h का वह मान, जिसके लिए E_1 तथा E_2 बराबर है, होगा : (दिया है: पृथ्वी की त्रिज्या $= 6.4 \times 10^3$ km)

(1) 1.28×10^4 km

(2) 6.4×10^3 km

(3) 3.2×10^3 km

(4) 1.6×10^3 km

2. सूर्य के चारों ओर वृत्ताकार कक्ष में गतिशील द्रव्यमान m वाले एक ग्रह का सूर्य के केन्द्र के सापेक्ष कोणीय संवेग L है, तो इसका त्रिज्यीय वेग है:–

(1) $\frac{4L}{m}$ (2) $\frac{L}{m}$ (3) $\frac{L}{2m}$ (4) $\frac{2L}{m}$

3. प्रत्येक द्रव्यमान 3×10^{31} kg वाले दो तारों के मध्य दूरी 2×10^{11}m है। ये उभयनिष्ठ द्रव्यमान केन्द्र O के सापेक्ष एक तल में घूर्णन करते हैं। एक उल्का पिण्ड तारे के घूर्णन तल के लम्बवत् गतिशील होकर O से गुजरता है। इस द्वितारे के गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र से पलायन के लिये O पर उल्कापिण्ड की न्यूनतम चाल क्या होनी चाहिये ? (गुरूत्वाकर्षण नियतांक $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2 kg^{-2})

(1) 1.4×10^5 m/s (2) 24×10^4 m/s

(3) 3.8×10^4 m/s (4) 2.8×10^5 m/s

4. एक उपग्रह पृथ्वी के परित: वृत्ताकार कक्षा में एक नियत गति v से घूम रहा है। उपग्रह से द्रव्यमान 'm' का एक पिण्ड इस तरह उत्क्षेपित होता है कि वह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण से ठीक पलायन कर जाता है। उत्क्षेपण के समय पिण्ड की गतिज ऊर्जा का मान होगा :

(1) $\frac{3}{2}mv^2$ (2) mv^2

(3) $2mv^2$ (4) $\frac{1}{2}mv^2$

5. एक ग्रह का द्रव्यमान तथा व्यास, पृथ्वी की संगत राशियों का तीन गुना है। पृथ्वी पर एक सरल लोलक का आवर्तकाल 2s है। उसी लोलक का ग्रह पर आवर्तकाल होगा :–

(1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$s (2) $2\sqrt{3}$s

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$s (4) $\frac{3}{2}$s

6. पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई पर एक उपग्रह एक वृत्तीय कक्षा में इस प्रकार घूम रहा है कि h << R जहाँ R पृथ्वी की त्रिज्या है। माना कि पृथ्वी के वायुमण्डल का प्रभाव नगण्य है। कक्षीय चाल में कितनी न्यूनतम वृद्धि होनी चाहिए जिससे कि उपग्रह पृथ्वी के गुरूत्वीय क्षेत्र से पलायन कर सके :–

(1) $\sqrt{gR}\left(\sqrt{2}-1\right)$ (2) $\sqrt{2gR}$

(3) $\sqrt{gR}$ (4) $\sqrt{\frac{gR}{2}}$

7. दो उपग्रह A व B के द्रव्यमान क्रमश: m तथा 2m है। A पृथ्वी के चारों ओर R त्रिज्या की वृत्ताकार कक्षा में तथा B, 2R त्रिज्या की वृत्ताकार कक्षा में है। इनकी गतिज ऊर्जाओं का अनुपात T_A/T_B है :

(1) 2 (2) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{2}$

8. लम्बाई L की एक छड़ x = a तथा x = L + a के मध्य रखी है। यदि इस छड़ का प्रति इकाई लम्बाई द्रव्यमान $A + Bx^2$ है, तो बिन्दु x = 0 पर रखे हुए एक बिन्दु द्रव्यमान 'm' पर, छड़ द्वारा लगाया गुरूत्वीय बल होगा:–

(1) $Gm\left[A\left(\frac{1}{a+L}-\frac{1}{a}\right)-BL\right]$

(2) $Gm\left[A\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+L}\right)+BL\right]$

(3) $Gm\left[A\left(\frac{1}{a+L}-\frac{1}{a}\right)+BL\right]$

(4) $Gm\left[A\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+L}\right)-BL\right]$

9. M द्रव्यमान का एक उपग्रह पृथ्वी के परित: R त्रिज्या की एक वृत्तीय कक्षा में घूर्णन कर रहा है। समान द्रव्यमान का एक धूमकेतू पृथ्वी की ओर गिरते हुए, इस उपग्रह के साथ पूर्णतया अप्रत्यास्थ संघट्ट करता है। उपग्रह तथा धूमकेतू की चालें संघट्ट से ठीक पहले बराबर है। संघट्ट के बाद संयुक्त पिण्ड की गति होगी :-

(1) भिन्न त्रिज्या की एक वृत्तीय कक्षा में

(2) R त्रिज्या की उसी वृत्तीय कक्षा में

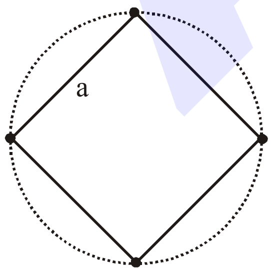
(3) दीर्घवृत्तीय कक्षा में

(4) इस प्रकार कि यह अनन्त में पलायन कर जायेगा।

10. एक रॉकेट को पृथ्वी से इस तरह प्रक्षेपित करते हैं कि वह वापस नहीं आता है। यदि इसके लिये रॉकेट प्रक्षेपक (launcher) द्वारा दी गयी न्यूनतम ऊर्जा E है तो उसी रॉकेट को चन्द्रमा की सतह से प्रक्षेपित करने के लिए प्रक्षेपक द्वारा दी गयी न्यूनतम ऊर्जा क्या होगी? मानिये कि पृथ्वी तथा चन्द्रमा का घनत्व समान है तथा पृथ्वी का आयतन चन्द्रमा से 64 गुना ज्यादा है :-

(1) $\frac{E}{4}$ (2) $\frac{E}{16}$ (3) $\frac{E}{32}$ (4) $\frac{E}{64}$

11. द्रव्यमान M के चार एकसमान कण भुजा 'a' के एक वर्ग के कोनों पर स्थित है। यदि ये कण एक दूसरे के गुरूत्वाकर्षण प्रभाव में इस वर्ग के परिवृत्त एक वृत्तीय कक्षा में गतिशील है तो कण की चाल क्या होगी?



(1) $1.21\sqrt{\frac{GM}{a}}$ (2) $1.41\sqrt{\frac{GM}{a}}$

(3) $1.16\sqrt{\frac{GM}{a}}$ (4) $1.35\sqrt{\frac{GM}{a}}$

12. एक परीक्षण कण द्रव्यमान घनत्व $\rho(r) = \frac{K}{r^2}$ से उत्पन्न गुरूत्वीय क्षेत्र में एक वृत्ताकार कक्षा में घूम रहा है। कण के कक्ष की त्रिज्या R तथा इसके आवर्तकाल T के बीच सही सम्बन्ध होगा :

(1) T/R^2 नियत है। (2) TR नियत है।

(3) T^2/R^3 नियत है। (4) T/R नियत है।

13. द्रव्यमान 'M' तथा त्रिज्या 'a' का एक ठोस गोला एक एकसमान समकेन्द्रीय गोलीय आवरण, जिसकी मोटाई '2a' तथा द्रव्यमान '2M' है, से घिरा है। केन्द्र से '3a' दूरी पर गुरूत्वीय क्षेत्र होगा :

(1) $\frac{2GM}{9a^2}$ (2) $\frac{GM}{3a^2}$

(3) $\frac{GM}{9a^2}$ (4) $\frac{2GM}{3a^2}$

14. एक ग्रह की सतह से 20 km ऊँचाई पर एक अन्तरिक्षयान ग्रह के परित: कक्षा में घूम रहा है। यदि यान पर सिर्फ ग्रह का गुरूत्वीय क्षेत्र प्रभावी है तो यान द्वारा 24 hrs में लगाये गये पूरे चक्करों की संख्या का मान होगा?

[दिया है : ग्रह का द्रव्यमान = 8×10^{22} kg ;

ग्रह की त्रिज्या = 2×10^6 m,

गुरूत्वीय नियतांक $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm²/kg²]

(1) 9 (2) 11

(3) 13 (4) 17

15. पृथ्वी की सतह पर गुरूत्वीय त्वरण का मान 9.8 ms^{-2} है। पृथ्वी की सतह से वह ऊँचाई, जहाँ गुरूत्वीय त्वरण घटकर 4.9 ms^{-2} हो जाती है, होगी : (पृथ्वी की त्रिज्या = 6.4×10^6 m)

(1) 1.6×10^6 m (2) 6.4×10^6 m

(3) 9.0×10^6 m (4) 2.6×10^6 m

16. एक पिण्ड के पृथ्वी तथा एक दूसरे ग्रह की सतह पर भारों का अनुपात 9 : 4 हैं। दूसरे ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का $\frac{1}{9}$ है। यदि पृथ्वी की त्रिज्या 'R' है तो ग्रह की त्रिज्या क्या होगी ? (माना कि दोनों ग्रहों का द्रव्यमान घनत्व समान है)

(1) $\frac{R}{3}$ (2) $\frac{R}{2}$

(3) $\frac{R}{4}$ (4) $\frac{R}{9}$

SOLUTION

1. Ans. (3)

$U_{surface} + E_1 = U_h$

KE of satelite is zero at earth surface & at height h

$$-\frac{GM_em}{R_e}+E_1=-\frac{GM_em}{(Re+h)}$$

$$E_1 = GM_em\left(\frac{1}{R_e}-\frac{1}{R_e+h}\right)$$

$$E_1 = \frac{GM_em}{(R_e+h)}\times\frac{h}{R_e}$$

Gravitational attraction $F_G = ma_C = \frac{mv^2}{(R_e+h)}$

$$E_2 \Rightarrow \frac{mv^2}{(R_e+h)}=\frac{GM_em}{(R_e+h)^2}$$

$$mv^2 = \frac{GM_em}{(R_e+h)}$$

$$E_2 = \frac{mv^2}{2}=\frac{GM_em}{2(R_e+h)}$$

$E_1 = E_2$

$$\frac{h}{R_e}=\frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{R_e}{2}=3200km$$

2. Ans. (3)

$$\frac{dA}{dt}=\frac{L}{2m}$$

3. Ans. (4)

By energy convervation between 0 & ∞.

$$-\frac{GMm}{r}+\frac{-GMm}{r}+\frac{1}{2}mV^2=0+0$$

[M is mass of star m is mass of meteroite)

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{4GM}{r}}=2.8\times10^5 m/s$$

4. Ans. (2)

At height r from center of earth. orbital velocity

$$=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

∴ By energy conservation

$$\text{KE of 'm'} + \left(-\frac{GMm}{r}\right)=0+0$$

(At infinity, PE = KE = 0)

$$\Rightarrow \text{KE of 'm'} = \frac{GMm}{r}=\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2 m = mv^2$$

5. Ans. (2)

$$\because g=\frac{GM}{R^2}$$

$$\frac{g_p}{g_e}=\frac{M_e}{M_e}\left(\frac{R_e}{R_p}\right)^2=3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$$

Also $T\propto\frac{1}{\sqrt{g}}$

$$\Rightarrow \frac{T_p}{T_e}=\sqrt{\frac{g_e}{g_p}}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow T_p=2\sqrt{3}s$$

6. Ans. (1)

$$v_0 = \sqrt{g(R+h)} \approx\sqrt{gR}$$

$$v_e = \sqrt{2g(R+h)}\approx\sqrt{2gR}$$

$$\Delta v=v_e-v_0=(\sqrt{2}-1)\sqrt{gR}$$

7. Ans. (3)

Orbital velocity $V = \sqrt{\frac{GMe}{r}}$

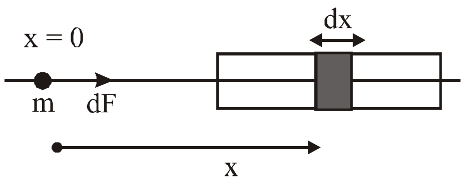
$$T_A = \frac{1}{2}m_AV_A^2$$

$$T_B = \frac{1}{2}m_BV_B^2$$

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B}=\frac{m\times\frac{Gm}{R}}{2m\times\frac{Gm}{2R}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = 1$$

8. Ans. (2)



dm= $(A + Bx^2)dx$

$$dF = \frac{GM\,dm}{x^2}$$

$$= F = \int_a^{a+L} \frac{GM}{x^2}\left(A + Bx^2\right)dx$$

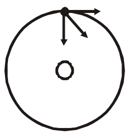
$$= GM\left[-\frac{A}{x} + Bx\right]_a^{a+L}$$

$$= GM\left[A\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+L}\right) + BL\right]$$

9. Ans. (3)

$$mv\hat{i} + mv\hat{j}$$

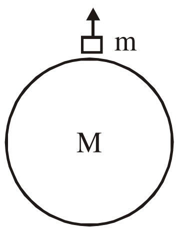
$$= 2m\vec{v}^1$$



$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

10. Ans. (2)

Sol.



minimum energy required (E) = – (Potential energy of object at surface of earth)

$$= -\left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{GMm}{R}$$

Now $M_{earth} = 64\ M_{moon}$

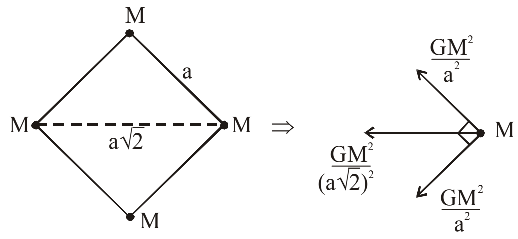
$$\rho . \frac{4}{3}\pi R_e^3 = 64.\frac{4}{3}\pi R_m^3 \Rightarrow R_e = 4R_m$$

$$\text{Now } \frac{E_{moon}}{E_{earth}} = \frac{M_{moon}}{M_{earth}} . \frac{R_{earth}}{R_{moon}} = \frac{1}{64} \times \frac{4}{1}$$

$$\Rightarrow E_{moon} = \frac{E}{16}$$

11. Ans. (3)

Sol.



Net force on particle towards centre of circle

$$\text{is } F_C = \frac{GM^2}{2a^2} + \frac{GM^2}{a^2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{GM^2}{a^2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$$

This force will act as centripetal force. Distance of particle from centre of circle is $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

$$r = \frac{a}{\sqrt{2}},\ F_C = \frac{mv^2}{r}$$

$$\frac{mv^2}{\frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{GM^2}{a^2}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$$

$$v^2 = \frac{GM}{a}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + 1\right)$$

$$v^2 = \frac{GM}{a}(1.35)$$

$$v = 1.16\sqrt{\frac{GM}{a}}$$

12. Ans. (4)

Sol. $m = \int_0^R \rho\ 4\pi r^2 dr$

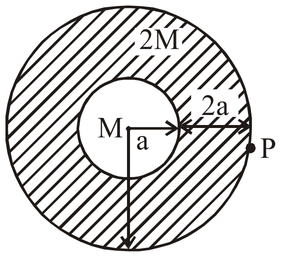
$m = 4\pi KR$

$v \propto \sqrt{4\pi K}$

$$\frac{T}{R} = \frac{2\pi}{\sqrt{4\pi K}}.$$

13. Ans. (2)

Sol.



We use gauss's Law for gravitation

$g \cdot 4\pi r^2$ = (Mass enclosed) $4\pi G$

$g = \frac{3M4\pi G}{4\pi(3a)^2}$

$= \frac{MG}{3a^2}$

Option (2)

14. Ans. (2)

Sol. $F_g = \frac{mv^2}{r}$

$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$

$V = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{(6.67\times10^{-11})(8\times10^{22})}{2.02\times10^{6}}}$

$V = 1.625 \times 10^3$

$T = \frac{2\pi r}{V}$

$n \times T = 24 \times 60 \times 60$

$n\left[\frac{2\pi(2.02\times10^6)}{1.625\times10^3}\right] = 24\times3600$

$n = \frac{24\times3600\times1.625\times10^3}{2\pi(2.02\times10^6)}$

$n = 11$

15. Ans. (4)

Sol. $\frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{2R^2}$

$R + h = \sqrt{2}R$

$h = (\sqrt{2}-1)R$

$\simeq 2.6\times10^6$ m

16. Ans. (2)

Sol. Since mass of the object remains same

$\therefore$ Weight of object will be proportional to 'g' (acceleration due to gravity)

Given

$\frac{W_{earth}}{W_{planet}} = \frac{9}{4} = \frac{g_{earth}}{g_{planet}}$

Also, $g_{surface} = \frac{GM}{R^2}$ (M is mass planet, G is universal gravitational constant, R is radius of planet)

$\therefore \frac{9}{4} = \frac{GM_{earth}\,R^2_{planet}}{GM_{planet}\,R^2_{earth}} = \frac{M_{earth}}{M_{planet}} \times \frac{R^2_{Planet}}{R^2_{earth}} = 9\frac{R^2_{Planet}}{R^2_{earth}}$

$\therefore R_{planet} = \frac{R_{earth}}{2} = \frac{R}{2}$