VECTORS

1. माना $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}, \vec{b}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{c}$ एक सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}=\vec{0}$ तथा $\vec{a}.\vec{c}=4$ हो, तो $|\vec{c}|^2$ का मान होगा :-

(1) $\frac{19}{2}$ (2) 8 (3) $\frac{17}{2}$ (4) 9

2. माना $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\sqrt{2}\hat{k}, \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+\sqrt{2}\hat{k}$ तथा $\vec{c}=5\hat{i}+\hat{j}+\sqrt{2}\hat{k}$ तीन ऐसे सदिश हैं कि $\vec{b}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप सदिश, $\vec{a}$ है। यदि $\vec{a}+\vec{b}$ सदिश $\vec{c}$ के लंबवत है, तो $|\vec{b}|$ बराबर है :

(1) $\sqrt{22}$ (2) 4 (3) $\sqrt{32}$ (4) 6

3. माना $\vec{a}=2\hat{i}+\lambda_1\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=4\hat{i}+(3-\lambda_2)\hat{j}+6\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}+6\hat{j}+(\lambda_3-1)\hat{k}$ तीन ऐसे सदिश है कि $\vec{b}=2\vec{a}$ है तथा सदिश $\vec{a}$, सदिश $\vec{c}$ के लम्बवत् हैं, तो $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ का एक संभावित मान है

(1) $\left(\frac{1}{2},4,-2\right)$ (2) $\left(-\frac{1}{2},4,0\right)$

(3) (1,3,1) (4) (1,5,1)

4. माना $\vec{\alpha}=(\lambda-2)\vec{a}+\vec{b}$ तथा $\vec{\beta}=(4\lambda-2)\vec{a}+3\vec{b}$ दो सदिश दिये गये है जहाँ सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समरेखीय नहीं है। λ का वह मान, जिसके लिये सदिश $\vec{\alpha}$ तथा $\vec{\beta}$ समरेखीय हो, होगा :

(1) –3 (2) 4 (3) 3 (4) –4

5. माना $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+\lambda\hat{j}+4\hat{k}$ तथा $\vec{c}=2\hat{i}+4\hat{j}+(\lambda^2-1)\hat{k}$ समतलीय सदिश है, तो शून्येतर सदिश $\vec{a}\times\vec{c}$ है

(1) $-14\hat{i}-5\hat{j}$ (2) $-10\hat{i}-5\hat{j}$

(3) $-10\hat{i}+5\hat{j}$ (4) $-14\hat{i}+5\hat{j}$

6. माना $\sqrt{3}\hat{i}+\hat{j}, \hat{i}+\sqrt{3}\hat{j}$ तथा $\beta\hat{i}+(1-\beta)\hat{j}$ क्रमशः तीन बिन्दुओं A, B तथा C के मूलबिन्दु O के सापेक्ष, स्थिति सदिश हैं। यदि C की, OA तथा OB के बीच बने न्यूनकोण के समद्विभाजक से दूरी $\frac{3}{\sqrt{2}}$ है, तो β के सभी संभावित मानों का योग है

(1) 2 (2) 1

(3) 3 (4) 4

7. μ के उन भिन्न वास्तविक मानों का योग, जिनके लिये सदिश $\mu\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\mu\hat{j}+\hat{k}$, तथा $\hat{i}+\hat{j}+\mu\hat{k}$ समतलीय (co-planer) हैं, है :

(1) 2 (2) 0 (3) –1 (4) 1

8. माना $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन इकाई सदिश है जिसमें से सदिश $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ असमान्तर है। यदि कोण α तथा β हैं जो सदिश $\vec{a}$ क्रमशः सदिश $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के साथ बनाता है तथा $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\frac{1}{2}\vec{b}$ हो, तो $|\alpha-\beta|$ का मान होगा :

(1) 60° (2) 30°

(3) 90° (4) 45°

9. सदिश $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ के सदिशों $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ को अंतर्विष्ट करने वाले समतल के लंबवर्तीय सदिश पर प्रक्षेप का परिमाण है –

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (3) $\sqrt{6}$ (4) $3\sqrt{6}$

10. माना किसी वास्तविक संख्या x के लिए $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+x\hat{k}$ तथा $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ है। तो $|\vec{a}\times\vec{b}|=r$ तभी सम्भव है, जब :-

(1) $3\sqrt{\frac{3}{2}}<r<5\sqrt{\frac{3}{2}}$ (2) $0<r\le\sqrt{\frac{3}{2}}$

(3) $\sqrt{\frac{3}{2}}<r\le3\sqrt{\frac{3}{2}}$ (4) $r\ge5\sqrt{\frac{3}{2}}$

11. माना $\vec{\alpha} = 3\hat{i} + \hat{j}$ तथा $\vec{\beta} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ है यदि $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2$ है, जहाँ $\vec{\beta}_1$ सदिश $\vec{\alpha}$ के समांतर है तथा $\vec{\beta}_2$ सदिश $\vec{\alpha}$ के लम्बवत है, तो $\vec{\beta}_1 \times \vec{\beta}_2$ बराबर है

(1) $-3\hat{i} + 9\hat{j} + 5\hat{k}$ (2) $3\hat{i} - 9\hat{j} - 5\hat{k}$

(3) $\frac{1}{2}\left(-3\hat{i} + 9\hat{j} + 5\hat{k}\right)$ (4) $\frac{1}{2}\left(3\hat{i} - 9\hat{j} + 5\hat{k}\right)$

12. यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$ से $\hat{i}$, से $\pi/3$ $\hat{j}$ $\pi/4$ तथा $\hat{k}$, से $\theta \in (0, \pi)$ कोण बनाता है, तो θ का एक मान है :-

(1) $\frac{5\pi}{12}$ (2) $\frac{5\pi}{6}$ (3) $\frac{2\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

13. एक बिन्दु जिसका स्थिति सदिश $-\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ है, की एक सरल रेखा, जो बिन्दु (2, 3, –4) से होकर जाती है तथा सदिश $6\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ के समान्तर है, से दूरी है:

(1) 7 (2) $4\sqrt{3}$

(3) $2\sqrt{13}$ (4) 6

14. यदि सदिशों $\hat{i} + \lambda\hat{j} + \hat{k}$, $\hat{j} + \lambda\hat{k}$ तथा $\lambda\hat{i} + \hat{k}$ द्वारा बनाये गये समान्तर षट्फलक (parallelopiped) का आयतन न्यूनतम है, तो λ बराबर है :

(1) $\sqrt{3}$ (2) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (4) $-\sqrt{3}$

15. माना $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ दो सदिश हैं। यदि दोनों सदिशों $\vec{a} + \vec{b}$ तथा $\vec{a} - \vec{b}$ के लम्बवत एक सदिश का परिमाण 12 है, तो एक ऐसा सदिश है :

(1) $4(2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ (2) $4(-2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k})$

(3) $4(2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k})$ (4) $4(2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

16. माना $\alpha \in R$ तथा तीन सदिश $\vec{a} = \alpha\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \alpha\hat{k}$ तथा $\vec{c} = \alpha\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ है समुच्चय S = {α : $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय है} होगा

(1) एकल है।

(2) में तथ्यत: दो संख्यायें हैं जिनमें से केवल एक धनात्मक है।

(3) में तथ्यत: (exactly) दो धनात्मक संख्यायें है।

(4) रिक्त है।

node06\B0B0-BA\Kota\JEE Main\Jee Main-2019_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Vectors.p65

SOLUTION

1. Ans. (1)

$\vec{a}\times\vec{c}=-\vec{b}$

$(\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{a}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$\Rightarrow (\vec{a}\times\vec{c})\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$

$\Rightarrow (\vec{a}.\vec{a})\vec{c}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$

$\Rightarrow 2\vec{c}-4\vec{a}=\vec{a}\times\vec{b}$

Now $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

So, $2\vec{c}=4\hat{i}-4\hat{j}-\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$

$=3\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{c}=\frac{3}{2}\hat{i}-\frac{5}{2}\hat{j}+\hat{k}$

$|\vec{c}|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{25}{4}+1}=\sqrt{\frac{38}{4}}=\sqrt{\frac{19}{2}}$

$|\vec{c}|^2=\frac{19}{2}$

2. Ans. (4)

Projection of $\vec{b}$ on $\vec{a}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}=|\vec{a}|$

$\Rightarrow b_1 + b_2 = 2$ ...(1)

and $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{c}\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b}).\vec{c}=0$

$\Rightarrow 5b_1 + b_2 = -10$ ...(2)

from (1) and (2) $\Rightarrow b_1 = -3$ and $b_2 = 5$

then $|\vec{b}|=\sqrt{b_1^2+b_2^2+2}=6$

3. Ans. (2)

$4\hat{i}+(3-\lambda_2)\hat{j}+6\hat{k}=4\hat{i}+2\lambda_1\hat{j}+6\hat{k}$

$\Rightarrow 3-\lambda_2=2\lambda_1 \Rightarrow 2\lambda_1+\lambda_2=3$ ....(1)

Given $\vec{a}.\vec{c}=0$

$\Rightarrow 6+6\lambda_1+3(\lambda_3-1)=0$

$\Rightarrow 2\lambda_1+\lambda_3=-1$ .....(2)

Now $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda_1, 3-2\lambda_1, -1-2\lambda_1)$

Now check the options, option (2) is correct

4. Ans. (4)

$\vec{\alpha}=(\lambda-2)\vec{\alpha}+\vec{b}$

$\vec{\beta}=(4\lambda-2)\vec{\alpha}+3\vec{b}$

$\frac{\lambda-2}{4\lambda-2}=\frac{1}{3}$

$3\lambda-6=4\lambda-2$

$\boxed{\lambda=-4}$

$\therefore$ Option (4)

5. Ans. (3)

$[\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}]=0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & \lambda & 4\\ 2 & 4 & \lambda^2-1\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \lambda^3-2\lambda^2-9\lambda+18=0$

$\Rightarrow \lambda^2(\lambda-2)-9(\lambda-2)=0$

$\Rightarrow (\lambda-3)(\lambda+3)(\lambda-2)=0$

$\Rightarrow \lambda = 2, 3, -3$

So, $\lambda = 2$ (as $\vec{a}$ is parallel to $\vec{c}$ for $\lambda = \pm 3$)

Hence $\vec{a}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 3\end{vmatrix}=-10\hat{i}+5\hat{j}$

6. Ans. (2)

Angle bisector is $x - y = 0$

$\Rightarrow \frac{|\beta-(1-\beta)|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow |2\beta-1|=3$

$\Rightarrow \beta=2 \text{ or } -1$

7. Ans. (3)

$\begin{vmatrix}\mu & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 1 & \mu\end{vmatrix}=0$

$\mu(\mu^2-1)-1(\mu-1)+1(1-\mu)=0$

$\mu^3-\mu-\mu+1+1\ \mu=0$

$\mu^3-3\mu+2=0$

$\mu^3-1-3(\mu-1)=0$

$\mu=1, \mu^2+\mu-2=0$

$\mu=1, \mu=-2$

sum of distinct solutions $=-1$

8. **Ans. (2)**

$$\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

$\because$ $\vec{b}$ & $\vec{c}$ are linearly independent

$\therefore$ $\vec{a}.\vec{c}=\frac{1}{2}$ & $\vec{a}.\vec{b}=0$

(All given vectors are unit vectors)

$\therefore$ $\vec{a} \wedge \vec{c}=60°$ & $\vec{a} \wedge \vec{b}=90°$

$\therefore$ $|\alpha-\beta| = 30°$

9. **Official Ans. by NTA (2)**

Sol. Vector perpendicular to plane containing the vectors $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ & $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ is parallel to vector

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

$\therefore$ Required magnitude of projection

$$=\frac{\left|(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})\right|}{\left|\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}\right|}$$

$$=\frac{|2-6+1|}{\left|\sqrt{6}\right|}=\frac{3}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

10. **Official Ans. by NTA (4)**

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 2 & x\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\left(2+x\right)\hat{i}+\left(x-3\right)\hat{j}-5k$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{4+x^2+4x+x^2+9-6x+25}$$

$$=\sqrt{2x^2-2x+38}$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\geq\sqrt{\frac{75}{2}}$$

$$\Rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\geq 5\sqrt{\frac{3}{2}}$$

11. **Official Ans. by NTA (3)**

Sol. $\vec{\alpha}=3\hat{i}+\hat{j}$

$\vec{\beta}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

$\vec{\beta}=\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2$

$\vec{\beta}_1=\lambda\left(3\hat{i}+\hat{j}\right),\vec{\beta}_2=\lambda\left(3\hat{i}+\hat{j}\right)-2\hat{i}+j-3\hat{k}$

$\vec{\beta}_2.\vec{\alpha}=0$

$(3\lambda - 2).3 + (\lambda + 1) = 0$

$9\lambda - 6 + \lambda + 1 = 0$

$\lambda=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \vec{\beta}_1=\frac{3}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}$

$\Rightarrow \vec{\beta}_2=-\frac{1}{2}\hat{i}+\frac{3}{2}\hat{j}-3\hat{k}$

Now $\vec{\beta}_1\times\vec{\beta}_2=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -3\end{vmatrix}$

$$=\hat{i}\left(-\frac{3}{2}-0\right)-\hat{j}\left(-\frac{9}{2}-0\right)+\hat{k}\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\frac{3}{2}\hat{i}+\frac{9}{2}\hat{j}+\frac{5}{2}\hat{k}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-3\hat{i}+9\hat{j}+5\hat{k}\right)$$

Aliter :

$\vec{\beta}=\vec{\beta}_1-\vec{\beta}_2 \Rightarrow \vec{\beta}.\hat{\alpha}=\vec{\beta}_1.\hat{\alpha}=\left|\vec{\beta}_1\right|$

$\Rightarrow \vec{\beta}_1=\left(\vec{\beta}.\hat{\alpha}\right)\hat{\alpha}$

$\Rightarrow \vec{\beta}_2=\left(\vec{\beta}.\hat{\alpha}\right)\hat{\alpha}-\vec{\beta}$

$\Rightarrow \vec{\beta}_1\times\vec{\beta}_2=-\left(\vec{\beta}.\hat{\alpha}\right)\hat{\alpha}\times\vec{\beta}$

$$=\frac{-5}{10}\left(3\hat{i}+\hat{j}\right)\times\left(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-3\hat{i}+9\hat{j}+5\hat{k}\right)$$

node06\B0B0-BA\Kota\JEE Main\Jee Main-2019_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Vectors.p65

12. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

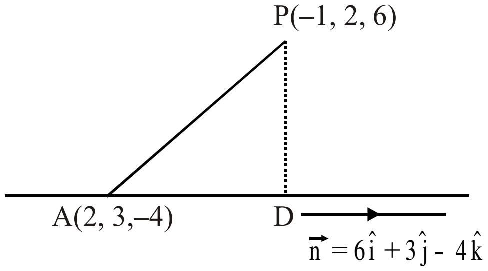
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\cos^2\gamma = 1$$

$$\cos^2\gamma = 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\cos^2\gamma = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\pi}{3} \text{ or } \frac{2\pi}{3}$$

13. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



$$AD = \left|\frac{\overrightarrow{AP}.\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \sqrt{61}$$

$$\Rightarrow PD = \sqrt{AP^2 - AD^2} = \sqrt{110-61} = 7$$

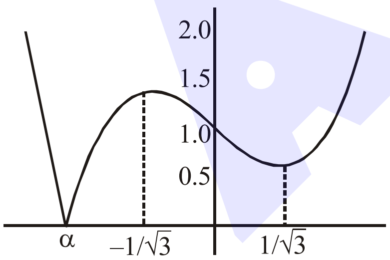
14. Official Ans. by NTA (3)

ALLEN Ans. Bonus

Sol. Volume of parallelopiped $= \left\|\begin{matrix} 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ \lambda & 0 & 1 \end{matrix}\right\|$

$f(\lambda) = |\lambda^3 - \lambda + 1|$

Its graph as follows



where $\alpha \approx -1.32$

$\because$ Question is asking minimum value of volume of parallelopiped & corresponding value of λ; the minimum value is zero, $\because$ cubic always has atleast one real root.

Hence answer to the question must be root of cubic $\lambda^3 - \lambda + 1 = 0$. None of the options satisfies the cubic.

Hence Question must be Bonus.

In JEE (Screening) 2003 same Question was asked and answer was given to be none of these, where the options were :

(A) –3 (B) 3

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) none of these

15. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = 2(\vec{b}\times\vec{a})$

$$= 2\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2(8\hat{i}-8\hat{j}+4\hat{k})$$

Required vector $= \pm 12\frac{(2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})}{3}$

$= \pm 4(2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})$

16. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ \alpha & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 3\alpha^2 + 18 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \in \phi$$

node06\B0B0-BA\Kota\JEE Main\Jee Main-2019_Subject Topic PDF With Solution\Mathematics\Hindi\Vectors.p65