SEQUENCE & PROGRESSION

1. यदि a, b तथा c तीन विभिन्न संख्यायें गुणोत्तर श्रेणी में है तथा $a + b + c = xb$ हो, तो x का मान नहीं हो सकता है:
(1) 4 (2) –3 (3) –2 (4) 2

2. माना $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ समान्तर श्रेणी है तथा $S = \sum_{i=1}^{30} a_i$ एवं $T = \sum_{i=1}^{15} a_{(2i-1)}$ है। यदि $a_5 = 27$ तथा $S - 2T = 75$ हो, तो a_{10} का मान होगा :
(1) 57 (2) 47 (3) 42 (4) 52

3. निम्न श्रेणी
$$1+6+\frac{9(1^2+2^2+3^2)}{7}+\frac{12(1^2+2^2+3^2+4^2)}{9}+\frac{15(1^2+2^2+\ldots+5^2)}{11}+\ldots$$ के प्रथम 15 पदों का योग है :
(1) 7820 (2) 7830 (3) 7520 (4) 7510

4. माना a, b तथा c एक समान्तर श्रेढ़ी (जो कि अचर समान्तर श्रेढ़ी नहीं है) के क्रमशः 7वें, 11वें तथा 13वें पद हैं। यदि ये एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के भी तीन क्रमागत पद हैं तो $\frac{a}{c}$ बराबर है :
(1) $\frac{1}{2}$ (2) 4 (3) 2 (4) $\frac{7}{13}$

5. धन पदों की एक अनन्त श्रेणी का योग 3 है तथा इसके पदों के घनों (cubes) का योग $\frac{27}{19}$ है, तो इस श्रेणी का सार्व अनुपात है :
(1) $\frac{4}{9}$ (2) $\frac{2}{9}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{3}$

6. माना $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है। यदि $\frac{a_3}{a_1} = 25$, तो $\frac{a_9}{a_5}$ बराबर है :
(1) $2(5^2)$ (2) $4(5^2)$
(3) 5^4 (4) 5^3

7. यदि एक शून्येतर समान्तर श्रेढ़ी का 19वां पद शून्य है, तो इसका (49 वाँ) : (29वाँ पद) है :-
(1) 3 : 1 (2) 4 : 1 (3) 2 : 1 (4) 1 : 3

8. माना x, y धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं तथा m, n धनपूर्णांक हैं। व्यंजक $\frac{x^m y^n}{(1+x^{2m})(1+y^{2n})}$ का अधिकतम मान है :-
(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{m+n}{6mn}$ (4) 1

9. एक गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत (consecutive) पदों का गुणनफल 512 है। यदि इसके पहले तथा दूसरे प्रत्येक पद में 4 जोड़ दें, तो यह तीन संख्याएँ एक समांतर श्रेढ़ी बनाती हैं। तो दी हुई गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीनों पदों का योग है
(1) 36 (2) 24 (3) 32 (4) 28

10. माना $S_k = \frac{1+2+3+\ldots+k}{k}$ है।
यदि $S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_{10}^2 = \frac{5}{12}A$ है, तो A बराबर है :
(1) 303 (2) 283 (3) 156 (4) 301

11. यदि $\sin^4\alpha + 4\cos^4\beta + 2 = 4\sqrt{2}\sin\alpha\cos\beta$; $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ हो, तो $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$ का मान होगा :
(1) 0 (2) $-\sqrt{2}$ (3) –1 (4) $\sqrt{2}$

12. यदि श्रेणी
$$\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(1\frac{1}{2}\right)^3+\left(2\frac{1}{4}\right)^3+3^3+\left(3\frac{3}{4}\right)^3+\ldots$$ के प्रथम 15 पदों का योगफल 225 k हो, तो k का मान होगा:
(1) 9 (2) 27
(3) 108 (4) 54

13. ऐसी सभी प्राकृत संख्याओं 'n' जो इस प्रकार है कि $100 < n < 200$ तथा H.C.F. (91, n) > 1 का योग है–
(1) 3221 (2) 3121
(3) 3203 (4) 3303

14. योग $\sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^k}$ बराबर है :-
(1) $2-\frac{3}{2^{17}}$ (2) $2-\frac{11}{2^{19}}$
(3) $1-\frac{11}{2^{20}}$ (4) $2-\frac{21}{2^{20}}$

15. यदि तीन भिन्न संख्याएं a,b,c गुणोत्तर श्रेढ़ी में है तथा समीकरण $ax^2 + 2bx + c = 0$ और $dx^2 + 2ex + f = 0$ का एक उभयनिष्ठ मूल है, तो निम्न में से कौन–सा एक कथन सत्य है?

(1) d, e, f गुणोतर श्रेढ़ी में हैं।

(2) $\frac{d}{a}, \frac{e}{b}, \frac{f}{c}$ समांतर श्रेणी में है।

(3) $\frac{d}{a}, \frac{e}{b}, \frac{f}{c}$ गुणोत्तर श्रेणी में है।

(4) d, e, f समांतर श्रेढ़ी में हैं।

16. माना भिन्न पदों वाली समांतर श्रेढ़ी (non-constant A.P.), a_1, a_2, a_3, ... के प्रथम n पदों का योगफल $50n + \frac{n(n-7)}{2}A$ है, जहाँ A एक अचर है। यदि इस समांतर श्रेढ़ी का सार्वअंतर d है, तो क्रमित युग्म (d, a_{50}) बराबर है

(1) (A, 50+46A) (2) (A, 50+45A)

(3) (50, 50+46A) (4) (50, 50+45A)

17. यदि एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पदों का योगफल तथा गुणनफल क्रमश: 33 तथा 1155 है, तो इसके 11वें पद का एक मान है :-

(1) –25 (2) 25

(3) –36 (4) –35

18. श्रेणी $1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 4 \times 7 + ...$ के 11 वें पर तक योगफल है :-

(1) 915 (2) 946 (3) 945 (4) 916

19. $$\frac{3 \times 1^3}{1^2} + \frac{5 \times (1^3 + 2^3)}{1^2 + 2^2} + \frac{7 \times (1^3 + 2^3 + 3^3)}{1^2 + 2^2 + 3^2} + ...$$

में दसवें पद तक का योगफल हैं :

(1) 660 (2) 620 (3) 680 (4) 600

20. यदि $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ एक समान्तर श्रेढ़ी में है तथा $a_1 + a_4 + a_7 + ... + a_{16} = 114$, है, तो $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$ बराबर है :

(1) 38 (2) 98

(3) 76 (4) 64

21. योगफल $$1 + \frac{1^3 + 2^3}{1 + 2} + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3}{1 + 2 + 3} + ... + \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + 15^3}{1 + 2 + 3 + ... + 15} - \frac{1}{2}(1 + 2 + 3 + ... + 15)$$ बराबर है :

(1) 1240 (2) 1860

(3) 660 (4) 620

22. माना a, b तथा c गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं जिसका सार्वअनुपात r है, जहाँ $a \neq 0$ और $0 < r \leq \frac{1}{2}$ हैं। यदि 3a, 7b तथा 15c एक समांतर श्रेढ़ी के प्रथम तीन पद है, तो इस समांतर श्रेढ़ी का चौथा पद हैं :

(1) $\frac{7}{3}a$ (2) a

(3) $\frac{2}{3}a$ (4) 5a

23. यदि समीकरण $375x^2 - 25x - 2 = 0$ के मूल α तथा β तो $\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} \alpha^r + \lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} \beta^r$ बराबर है :

(1) $\frac{21}{346}$ (2) $\frac{29}{358}$ (3) $\frac{1}{12}$ (4) $\frac{7}{116}$

24. माना S_n एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम n पदों के योग को दर्शाता है। यदि $S_4 = 16$ तथा $S_6 = -48$ है, तो S_{10} बराबर है :

(1) –320 (2) –260 (3) –380 (4) –410

25. यदि $a_1, a_2, a_3, ...$ एक समान्तर श्रेणी में इस प्रकार हैं कि $a_1 + a_7 + a_{16} = 40$ है, तो इस समान्तर श्रेणी के प्रथम 15 पदों का योगफल है :

(1) 200 (2) 280

(3) 120 (4) 150

26. यदि एक भिन्न पदों वाली गुणोत्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पद α, β तथा γ इस प्रकार हैं कि समीकरणों $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ तथा $x^2 + x - 1 = 0$ का एक मूल समान है, तो $\alpha(\beta + \gamma)$ बराबर है :

(1) $\beta\gamma$ (2) 0 (3) $\alpha\gamma$ (4) $\alpha\beta$

SOLUTION

1. Ans. (4)

$\frac{b}{r}, b, br \rightarrow$ G.P. $\quad (|r| \neq 1)$

given a + b + c = xb

$\Rightarrow b/r + b + br = xb$

$\Rightarrow b = 0$ (not possible)

or $1 + r + \frac{1}{r} = x \Rightarrow x - 1 = r + \frac{1}{r}$

$\Rightarrow x - 1 > 2$ or $x - 1 < -2$

$\Rightarrow x > 3$ or $x < -1$

So x can't be '2'

2. Ans. (4)

$S = a_1 + a_2 + ... + a_{30}$

$S = \frac{30}{2}[a_1 + a_{30}]$

$S = 15(a_1 + a_{30}) = 15(a_1 + a_1 + 29d)$

$T = a_1 + a_3 + ... + a_{29}$

$= (a_1) + (a_1 + 2d) ..... + (a_1 + 28d)$

$= 15a_1 + 2d(1 + 2 + ... + 14)$

$T = 15a_1 + 210\,d$

Now use $S - 2T = 75$

$\Rightarrow 15(2a_1 + 29d) - 2(15a_1 + 210\,d) = 75$

$\Rightarrow d = 5$

Given $a_5 = 27 = a_1 + 4d \Rightarrow a_1 = 7$

Now $a_{10} = a_1 + 9d = 7 + 9 \times 5 = 52$

3. Ans. (1)

$$T_n = \frac{(3 + (n-1) \times 3)(1^2 + 2^2 + ... + n^2)}{(2n+1)}$$

$$T_n = \frac{3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{2n+1} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

$$S_{15} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{15}(n^3 + n^2) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{15(15+1)}{2}\right)^2 + \frac{15 \times 16 \times 31}{6}\right]$$

$= 7820$

4. Ans. (2)

$a = A + 6d$

$b = A + 10d$

$c = A + 12d$

a,b,c are in G.P.

$\Rightarrow (A + 10d)^2 = (A + 6d)(a + 12d)$

$\Rightarrow \frac{A}{d} = -14$

$$\frac{a}{c} = \frac{A + 6d}{A + 12d} = \frac{6 + \frac{A}{d}}{12 + \frac{A}{d}} = \frac{6 - 14}{12 - 14} = 4$$

5. Ans. (3)

$\frac{a}{1-r} = 3 \quad ...(1)$

$$\frac{a^3}{1-r^3} = \frac{27}{19} \Rightarrow \frac{27(1-r)^3}{1-r^3} = \frac{27}{19}$$

$\Rightarrow 6r^2 - 13r + 6 = 0$

$\Rightarrow r = \frac{2}{3}$ as $|r| < 1$

6. Ans. (3)

$a_1, a_2, ..., a_{10}$ are in G.P.,

Let the common ratio be r

$\frac{a_3}{a_1} = 25 \Rightarrow \frac{a_1r^2}{a_1} = 25 \Rightarrow r^2 = 25$

$\frac{a_9}{a_5} = \frac{a_1r^8}{a_1r^4} = r^4 = 5^4$

7. Ans. (1)

$a + 18d = 0 \quad ...(1)$

$$\frac{a + 48d}{a + 28d} = \frac{-18d + 48d}{-18d + 28d} = \frac{3}{1}$$

8. Ans. (2)

$$\frac{x^m y^n}{(1 + x^{2m})(1 + y^{2n})} = \frac{1}{\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right)\left(y^n + \frac{1}{y^n}\right)} \leq \frac{1}{4}$$

using AM $\geq$ GM

9. Ans. (4)

Let terms are $\frac{a}{r}, a, ar \rightarrow$ G.P

$\therefore a^3 = 512 \Rightarrow a = 8$

$\frac{8}{r}+4, 12, 8r \rightarrow$ A.P.

$24 = \frac{8}{r}+4+8r$

$r = 2,\ r = \frac{1}{2}$

$r = 2\ (4, 8, 16)$

$r = \frac{1}{2}(16, 8, 4)$

Sum = 28

10. Ans. (1)

$S_K = \frac{K+1}{2}$

$\Sigma S_k^2 = \frac{5}{12}A$

$\sum_{K=1}^{10}\left(\frac{K+1}{2}\right)^2 = \frac{2^2+3^2+--+11^2}{4} = \frac{5}{12}A$

$\frac{11\times12\times23}{6}-1 = \frac{5}{3}A$

$505 = \frac{5}{3}A,\quad A = 303$

11. Ans (2)

A.M. $\geq$ G.M.

$\frac{\sin^4\alpha+4\cos^4\beta+1+1}{4} \geq (\sin^4\alpha.4\cos^4\beta.1.1)^{\frac{1}{4}}$

$\sin^4\alpha + 4\cos^2\beta + 2 \geq 4\sqrt{2}\sin\alpha\cos\beta$

given that $\sin^4\alpha + 4\cos^4\beta + 2$

$= 4\sqrt{2}\ \sin\alpha\cos\beta$

$\Rightarrow$ A.M. = G.M. $\Rightarrow \sin^4\alpha = 1 = 4\cos^4\beta$

$\sin\alpha = 1,\ \cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ as $\beta \in [0, \pi]$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)$

$= -2\sin\alpha\sin\beta$

$= -\sqrt{2}$

12. Ans. (2)

$S = \left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{6}{4}\right)^3+\left(\frac{9}{4}\right)^3+\left(\frac{12}{4}\right)^3+$............15 term

$= \frac{27}{64}\sum_{r=1}^{15} r^3$

$= \frac{27}{64}\cdot\left[\frac{15(15+1)}{2}\right]^2$

$= 225$ K (Given in question)

K = 27

13. Official Ans. by NTA (2)

Sol. S_A = sum of numbers between 100 & 200 which are divisible by 7.

$\Rightarrow\quad S_A = 105 + 112 + ... + 196$

$S_A = \frac{14}{2}[105+196] = 2107$

S_B = Sum of numbers between 100 & 200 which are divisible by 13.

$S_B = 104 + 117 + ... + 195 =$

$\frac{8}{2}[104+195] = 1196$

S_C = Sum of numbers between 100 & 200 which are divisible by both 7 & 13.

$S_C = 182$

$\Rightarrow$ H.C.F. $(91, n) > 1 = S_A + S_B - S_C = 3121$

14. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $S = \sum_{k=1}^{20}\frac{1}{2^k}$

$S = \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{3^2}+...+\frac{20}{2^{20}}$

$S\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+...+\frac{19}{2^{20}}+\frac{20}{2^{21}}$

$\Rightarrow\left(1-\frac{1}{2}\right)S = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{20}}-\frac{20}{2^{21}}$

$\Rightarrow S = 2-\frac{11}{2^{19}}$

15. Official Ans. by NTA (3)

Sol. a, b, c in G.P.

say a, ar, ar^2

satisfies $ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow x = -r$

$x = -r$ is the common root, satisfies second equation $d(-r)^2 + 2e(-r) + f = 0$

$$\Rightarrow d.\frac{c}{a} - \frac{2ce}{b} + f = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{a} + \frac{f}{c} = \frac{2e}{b}$$

16. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $S_n = 50n + \dfrac{n(n-7)}{2}A$

$T_n = S_n - S_{n-1}$

$= 50n + \dfrac{n(n-7)}{2}A - 50(n-1) - \dfrac{(n-1)(n-8)}{2}A$

$= 50 + \dfrac{A}{2}[n^2 - 7n - n^2 + 9n - 8]$

$= 50 + A(n-4)$

$d = T_n - T_{n-1}$

$= 50 + A(n-4) - 50 - A(n-5)$

$= A$

$T_{50} = 50 + 46A$

$(d, A_{50}) = (A, 50+46A)$

17. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $a - d + a + a + d = 33 \Rightarrow a = 11$

$a(a^2 - d^2) = 1155$

$121 - d^2 = 105$

$d^2 = 16 \Rightarrow d = \pm 4$

If $d = 4$ then Ist term = 7

If $d = -4$ then Ist term = 15

$T_{11} = 7 + 40 = 47$

OR $T_{11} = 15 - 40 = -25$

18. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $T_r = r(2r-1)$

$S = \Sigma 2r^2 - \Sigma r$

$$S = \frac{2.n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{11} = \frac{2}{6}.(11)(12)(23) - \frac{11(12)}{2} = (44)(23) - 66 = 946$$

19. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $$T_n = \frac{(3+(n-1)\times 2)(1^3+2^3+...+n^3)}{(1^2+2^2+...+n^2)}$$

$$= \frac{3}{2}n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

$\Rightarrow S_{10} = 660$

20. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $a_1 + a_4 + a_7 + a_{10} + a_{13} + a_{16} = 114$

$\Rightarrow \dfrac{6}{2}(a_1 + a_{16}) = 114$

$\Rightarrow a_1 + a_{16} = 38$

So, $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16} = \dfrac{4}{2}(a_1 + a_{16})$

$= 2 \times 38 = 76$

21. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $$\text{Sum} = \sum_{n=1}^{15} \frac{1^3+2^3+....n^3}{1+2+....+n} - \frac{1}{2}.\frac{15.16}{2}$$

$$= \sum_{n=1}^{15} \frac{n(n+1)}{2} - 60$$

$$= \sum_{n=1}^{15} \frac{n(n+1)(n+2-(n-1))}{6} - 60$$

$$= \frac{15.16.17}{6} - 60 = 620$$

22. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $b = ar$

$c = ar^2$

$3a$, $7b$ and $15\,c$ are in A.P.

$\Rightarrow 14b = 3a + 15c$

$\Rightarrow 14(ar) = 3a + 15\,ar^2$

$\Rightarrow 14r = 3 + 15r^2$

$\Rightarrow 15r^2 - 14r + 3 = 0 \;\; \Rightarrow (3r-1)(5r-3) = 0$

$r = \frac{1}{3}, \frac{3}{5}$.

Only acceptable value is $r = \frac{1}{3}$, because

$r \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

$\therefore$ c. d $= 7b - 3a = 7ar - 3a = \frac{7}{3}a - 3a = -\frac{2}{3}a$

$\therefore$ 4th term $= 15\,c - \frac{2}{3}a = \frac{15}{9}a - \frac{2}{3}a = a$

23. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $375x^2 - 25x - 2 = 0$

$\alpha + \beta = \frac{25}{375}, \; \alpha\beta = \frac{-2}{375}$

$\Rightarrow$ $(\alpha + \alpha^2 + \ldots$ upto infinite terms$)$
$+ (\beta + \beta^2 + \ldots$ upto infinite terms$)$

$= \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta} = \frac{1}{12}$

24. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $2\{2a+3d\} = 16$

$3(2a + 5d) = -48$

$2a + 3d = 8$

$2a + 5d = -16$

$\boxed{d = -12}$

$S_{10} = 5\,\{44 - 9 \times 12\}$
$= -320$

25. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $a_1 + a_7 + a_{16} = 40$

$a + a + 6d + a + 15d = 40$

$\Rightarrow 3a + 21d = 40 \qquad \Rightarrow \boxed{a + 7d = \frac{40}{3}}$

$S_{15} = \frac{15}{2}(2a + 14d) = 15(a + 7d)$

$S_{15} = 15 \times \frac{40}{3} \Rightarrow 200 \quad \boxed{S_{15} = 200}$

26. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$

Let $\beta = \alpha t$, $\gamma = \alpha t^2$

$\therefore \alpha x^2 + 2\alpha t x + \alpha t^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 2tx + t^2 = 0$

$\Rightarrow (x + t)^2 = 0$

$\Rightarrow x = -t$

it must be root of equation $x^2 + x - 1 = 0$

$\therefore t^2 - t - 1 = 0 \qquad (1)$

Now

$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha^2(t + t^2)$

Option 1 $\beta\gamma = \alpha t \,.\, \alpha t^2 = \alpha^2 t^3 = a^2 (t^2 + t)$
(from equation 1)