

PARABOLA

1. वृत्त $x^2 + y^2 - 6x = 0$ तथा परवलय $y^2 = 4x$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण होगा :
 (1) $2\sqrt{3}y = 12x + 1$ (2) $2\sqrt{3}y = -x - 12$
 (3) $\sqrt{3}y = x + 3$ (4) $\sqrt{3}y = 3x + 1$
2. एक परवलय का अक्ष, x अक्ष के अनुदिश है। यदि इसका शीर्ष तथा नाभि, धनात्मक x अक्ष पर मूलबिन्दु से क्रमशः 2 तथा 4 इकाई दूरी पर हो, तो निम्न में से कौनसा बिन्दु इस पर स्थित नहीं होगा ?
 (1) (4, -4) (2) (5, $2\sqrt{6}$)
 (3) (8, 6) (4) 6, $4\sqrt{2}$
3. माना A(4, -4) तथा B(9, 6) एक परवलय $y^2 = 4x$ पर स्थित दो बिंदु हैं। माना परवलय के चाप AOB (जहाँ O मूल बिंदु है) पर स्थित एक बिंदु C इस प्रकार चुना गया कि ΔACB का क्षेत्रफल अधिकतम है, तो ΔACB का क्षेत्रफल (वर्ग इकाईयों में) है :
 (1) $31\frac{3}{4}$ (2) 32 (3) $30\frac{1}{2}$ (4) $31\frac{1}{4}$
4. यदि परवल्यों $y^2 = 4b(x-c)$ तथा $y^2 = 8ax$ का एक उभयनिष्ठ अभिलम्ब है, तो क्रमित त्रिक (a, b, c) के लिए निम्न में से कौन सा एक सही विकल्प है ?
 (1) (1, 1, 0) (2) $(\frac{1}{2}, 2, 3)$
 (3) $(\frac{1}{2}, 2, 0)$ (4) (1, 1, 3)
5. समीकरण $x - \sqrt{2}y + 4\sqrt{2} = 0$ को रखने वाले परवलय $x^2 = 4y$ की जीवा की लम्बाई होगी :
 (1) $2\sqrt{11}$ (2) $3\sqrt{2}$
 (3) $6\sqrt{3}$ (4) $8\sqrt{2}$
6. यदि एक त्रिभुज, जिसका एक शीर्ष परवलय $y^2 + 4(x - a^2) = 0$ के शीर्ष पर है तथा अन्य दो शीर्ष परवलय तथा y -अक्ष के प्रतिच्छेदन बिन्दुओं पर हैं, का क्षेत्रफल 250 वर्ग इकाई है, तो 'a' का एक मान है
 (1) $5\sqrt{5}$ (2) $(10)^{2/3}$ (3) $5(2^{1/3})$ (4) 5
7. परवलय $y = x^2 + 1$, इस के एक बिन्दु (2, 5) पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा निर्देशांक अक्षों द्वारा प्रथम चतुर्थांश में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग इकाईयों में) है -
 (1) $\frac{14}{3}$ (2) $\frac{187}{24}$
 (3) $\frac{37}{24}$ (4) $\frac{8}{3}$
8. माना P(4, -4) तथा Q(9, 6) परवलय $y^2 = 4x$ पर स्थित दो बिन्दु हैं। O इस परवलय का शीर्ष बिन्दु है तथा X इस परवलय की चाप POQ का कोई ऐसा बिन्दु है, जिसके लिये ΔPXQ का क्षेत्रफल अधिकतम है, तो यह अधिकतम क्षेत्रफल (वर्ग इकाईयों में) है :
 (1) $\frac{125}{4}$ (2) $\frac{125}{2}$
 (3) $\frac{625}{4}$ (4) $\frac{75}{2}$
9. परवलय $x^2 = 8y$ की स्पर्श रेखा का समीकरण, जो x अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ θ कोण बनाता है, होगा :
 (1) $x = y \cot \theta + 2 \tan \theta$
 (2) $x = y \cot \theta - 2 \tan \theta$
 (3) $y = x \tan \theta - 2 \cot \theta$
 (4) $y = x \tan \theta + 2 \cot \theta$

10. परवलय $y^2 = 4x$ के उस बिन्दु, जहाँ यह वृत्त $x^2 + y^2 = 5$ को प्रथम चतुर्थांश में काटता है, पर खींची गई स्पर्श रेखा जिस बिंदु से होकर जाती है, वह है :-

(1) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ (2) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

(3) $\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{4}\right)$ (4) $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

11. यदि परवलय $y^2 = 16x$ की एक नाभिजीवा का एक छोर $(1, 4)$ पर है, तो इस नाभिजीवा की लंबाई है

(1) 25 (2) 24 (3) 20 (4) 22

12. यदि परवलय $y^2 = x$ के एक बिन्दु (α, β) , $(\beta > 0)$ पर, स्पर्श रेखा, दीर्घवृत्त $x^2 + 2y^2 = 1$ की भी स्पर्श रेखा है, तो α बराबर है :

(1) $2\sqrt{2} + 1$ (2) $\sqrt{2} - 1$

(3) $\sqrt{2} + 1$ (4) $2\sqrt{2} - 1$

13. परवलय $y^2 = 4x$ को बिन्दु $(1, 2)$ पर स्पर्श करने वाले तथा x -अक्ष को स्पर्श करने वाले दो वृत्तों में से छोटे वृत्त का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) है :-

(1) $4\pi(2 - \sqrt{2})$ (2) $8\pi(3 - 2\sqrt{2})$

(3) $4\pi(3 + \sqrt{2})$ (4) $8\pi(2 - \sqrt{2})$

14. यदि रेखा $ax + y = c$, दोनों वक्रों $x^2 + y^2 = 1$ तथा $y^2 = 4\sqrt{2}x$ को स्पर्श करती है, तो $|c|$ बराबर है :

(1) $1/2$ (2) 2 (3) $\sqrt{2}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

15. वक्र $y = (x - 2)^2 - 1$ के रेखा $x - y = 3$ से प्रतिच्छेदन बिन्दुओं पर वक्र की स्पर्श रेखायें निम्न में से किस बिन्दु पर मिलती हैं:

(1) $\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$ (2) $\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$

(3) $\left(\frac{5}{2}, -1\right)$ (4) $\left(\frac{5}{2}, 1\right)$

16. वक्रों $y^2 = 16x$ तथा $xy = -4$ की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है :

(1) $x + y + 4 = 0$ (2) $x - 2y + 16 = 0$

(3) $2x - y + 2 = 0$ (4) $x - y + 4 = 0$

SOLUTION

1. **Ans. (3)**

Let equation of tangent to the parabola $y^2 = 4x$ is

$$y = mx + \frac{1}{m},$$

$$\Rightarrow m^2x - ym + 1 = 0 \text{ is tangent to } x^2 + y^2 - 6x = 0$$

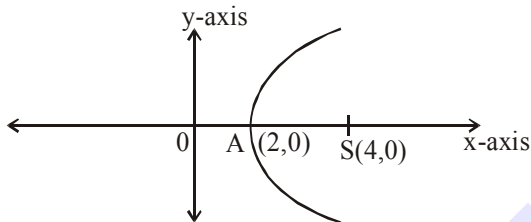
$$\Rightarrow \frac{|3m^2 + 1|}{\sqrt{m^4 + m^2}} = 3$$

$$m = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \text{tangent are } x + \sqrt{3}y + 3 = 0$$

$$\text{and } x - \sqrt{3}y + 3 = 0$$

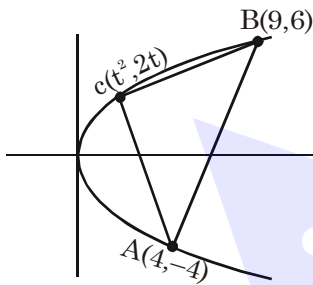
2. **Ans. (3)**



equation of parabola is $y^2 = 8(x - 2)$

(8, 6) does not lie on parabola.

3. **Ans. (4)**



$$\text{Area} = 5|t^2 - t - 6| = 5 \left| \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} \right|$$

is maximum if $t = \frac{1}{2}$

4. **Ans. (1,2,3,4)**

Normal to these two curves are

$$y = m(x - c) - 2bm - bm^3,$$

$$y = mx - 4am - 2am^3$$

If they have a common normal

$$(c + 2b)m + bm^3 = 4am + 2am^3$$

$$\text{Now } (4a - c - 2b)m = (b - 2a)m^3$$

We get all options are correct for $m = 0$ (common normal x-axis)

Ans. (1), (2), (3), (4)

Remark :

If we consider question as

If the parabolas $y^2 = 4b(x - c)$ and $y^2 = 8ax$ have a common normal other than x-axis, then which one of the following is a valid choice for the ordered triad (a, b, c) ?

$$\text{When } m \neq 0 : (4a - c - 2b)m = (b - 2a)m^2$$

$$m^2 = \frac{c}{2a - b} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{c}{2a - b} > 2$$

Now according to options, option 4 is correct

5. **Ans. (3)**

$$x^2 = 4y$$

$$x - \sqrt{2}y + 4\sqrt{2} = 0$$

Solving together we get

$$x^2 = 4 \left(\frac{x + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\sqrt{2}x^2 + 4x + 16\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}x^2 - 4x - 16\sqrt{2} = 0$$

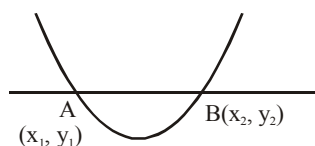
$$x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}; \quad x_1 x_2 = \frac{-16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -16$$

Similarly,

$$(\sqrt{2}y - 4\sqrt{2})^2 = 4y$$

$$2y^2 + 32 - 16y = 4y$$

$$2y^2 - 20y + 32 = 0 \begin{cases} y_1 + y_2 = 10 \\ y_1 y_2 = 16 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} l_{AB} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 64 + (10)^2 - 4(16)} \\ &= \sqrt{8 + 64 + 100 - 64} \\ &= \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

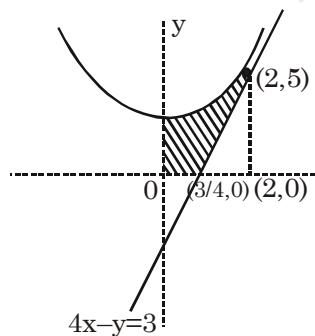
Option (3)

6. **Ans. (4)**Vertex is $(a^2, 0)$

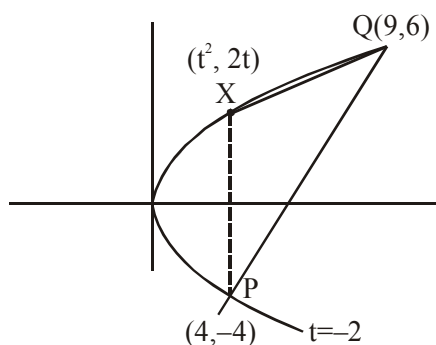
$$y^2 = -(x - a^2) \text{ and } x = 0 \Rightarrow (0, \pm 2a)$$

$$\text{Area of triangle is } = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot (a^2) = 250$$

$$\Rightarrow a^3 = 125 \text{ or } a = 5$$

7. **Ans. (3)**

$$\text{Area} = \int_0^2 (x^2 + 1) dx - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} \right) (5) = \frac{37}{24}$$

8. **Ans. (1)**

$$y^2 = 4x$$

$$2yy' = 4$$

$$y' = \frac{1}{t} = 2, \quad t = \frac{1}{2}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 1 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{125}{4}$$

9. **Ans. (1)**

$$x^2 = 8y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{4} = \tan \theta$$

$$\therefore x_1 = 4 \tan \theta$$

$$y_1 = 2 \tan^2 \theta$$

Equation of tangent :-

$$y - 2 \tan^2 \theta = \tan \theta (x - 4 \tan \theta)$$

$$\Rightarrow x = y \cot \theta + 2 \tan \theta$$

10. **Official Ans. by NTA (3)**

$$\text{Sol. Given } y^2 = 4x \quad \dots(1)$$

$$\text{and } x^2 + y^2 = 5 \quad \dots(2)$$

by (1) and (2)

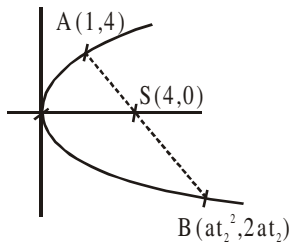
$$\Rightarrow x = 1 \text{ and } y = 2$$

equation of tangent at $(1, 2)$ to $y^2 = 4x$

$$\text{is } y = x + 1$$

11. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



$$y^2 = 4ax = 16x \Rightarrow a = 4$$

$$A(1,4) \Rightarrow 2 \cdot 4 \cdot t_1 = 4 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{length of focal chord} = a \left(t + \frac{1}{t} \right)^2$$

$$= 4 \left(\frac{1}{2} + 2 \right)^2 = 4 \cdot \frac{25}{4} = 25$$

12. Official Ans. by NTA (3)

Sol. T: $y(\beta) = \frac{1}{2}(x + \beta^2)$

$$2y\beta = x + \beta^2$$

$$y = \left(\frac{1}{2\beta} \right)x + \frac{\beta}{2}$$

$$m = \frac{1}{2\beta}; C = \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{\beta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4\beta^2} + \frac{1}{2}}$$

$$\frac{\beta^2}{4} = \frac{1}{4\beta^2} + \frac{1}{2}$$

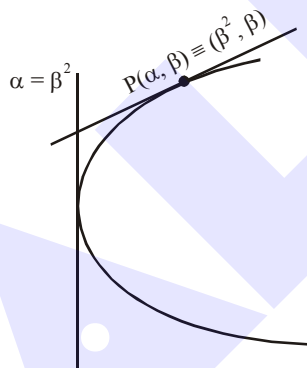
$$\frac{\beta^2}{4} = \frac{1 + 2\beta^2}{4\beta^2}$$

$$\Rightarrow \beta^4 - 2\beta^2 - 1 = 0$$

$$(\beta^2 - 1)^2 = 2$$

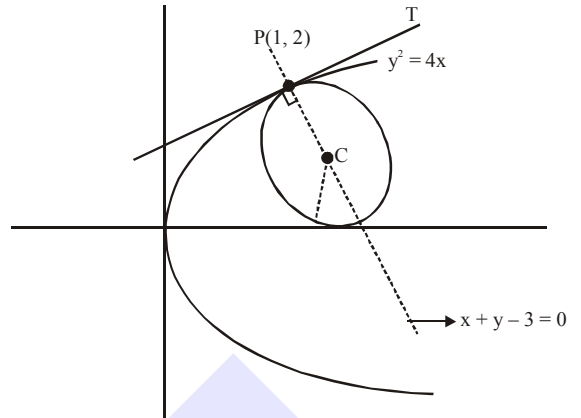
$$\beta^2 - 1 = \sqrt{2}$$

$$\beta^2 = \sqrt{2} + 1$$



13. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



Equation of circle is

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + \lambda(x - y + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + x(\lambda - 2) + y(-4 - \lambda) + (5 + \lambda) = 0$$

As circle touches x axis then $g^2 - c = 0$

$$\frac{(\lambda - 2)^2}{4} = (5 + \lambda)$$

$$\lambda^2 + 4 - 4\lambda = 20 + 4\lambda$$

$$\lambda^2 - 8\lambda - 16 = 0$$

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{128}}{2}$$

$$\lambda = 4 \pm 4\sqrt{2}$$

$$\text{Radius} = \left| \frac{(-4 - \lambda)}{2} \right|$$

Put λ and get least radius.

14. Official Ans. by NTA (3)

Sol. Tangent to $y^2 = 4\sqrt{2}x$ is $y = mx + \frac{\sqrt{2}}{m}$

it is also tangent to $x^2 + y^2 = 1$

$$\Rightarrow \left| \frac{\sqrt{2}/m}{\sqrt{1+m^2}} \right| = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

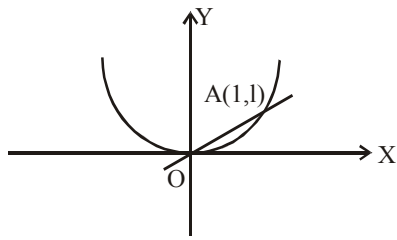
\Rightarrow Tangent will be $y = x + \sqrt{2}$ or $y = -x - \sqrt{2}$
compare with $y = -ax + C$

$$\Rightarrow a = \pm 1 \text{ \& } C = \pm\sqrt{2}$$

15. Official Ans. by NTA (3)

Sol. Put $x - 2 = X$ & $y + 1 = Y$

\therefore given curve becomes $Y = X^2$ and $Y = X$



tangent at origin is X-axis
and tangent at $A(1,1)$ is $Y + 1 = 2X$

\therefore their intersection is $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$\therefore x - 2 = \frac{1}{2}$ & $y + 1 = 0$

therefore $x = \frac{5}{2}, y = -1$

16. Official Ans. by NTA (4)

Sol. tangent to the parabola $y^2 = 16x$ is $y = mx + \frac{4}{m}$

solve it by curve $xy = -4$

$$\text{i.e. } mx^2 + \frac{4}{m}x + 4 = 0$$

condition of common tangent is $D = 0$

$$\therefore m^3 = 1$$

$$\Rightarrow m = 1$$

\therefore equation of common tangent is $y = x + 4$