MONOTONICITY

1. माना $f(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$, $x\in R$

जहाँ a, b तथा d शून्येतर वास्तविक अचर हैं, तो :-

(1) f, x का ह्रासमान फलन है।

(2) f, x का संतत फलन नहीं है।

(3) f', x का वर्धमान फलन है।

(4) f, x का न तो वर्धमान न ही ह्रासमान फलन है।

2. यदि फलन f, $f(x) = x^3 - 3(a-2)x^2 + 3ax + 7$ द्वारा दिया गया है किसी $a\in R$ के लिये अन्तराल (0, 1] में वर्द्धमान तथा अन्तराल [1, 5) में ह्यासमान हो, तो समीकरण $\frac{f(x)-14}{(x-1)^2}=0 (x\neq 1)$ का मूल होगा :

(1) 6 (2) 5 (3) 7 (4) –7

3. $f : [0, 2] \to R$ दो बार अवकलनीय फल्न इस प्रकार है कि सभी $x \in (0, 2)$ के लिए $f''(x) > 0$ है। यदि $\phi(x) = f(x) + f(2-x)$ है, तो ϕ

(1) (0, 2) पर ह्रसमान है।

(2) (0, 1) पर ह्रसमान तथा (1, 2) पर वर्धमान है।

(3) (0, 2) पर वर्धमान है।

(4) (0, 1) पर वर्धमान तथा (1, 2) पर ह्रसमान है।

4. माना $f(x) = e^x - x$ तथा $g(x) = x^2 - x$, $\forall x \in R$ तो सभी $x \in R$, जिनके लिए फलन $h(x) = (fog)(x)$ वर्धमान है, का समुच्चय है :

(1) $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},\infty\right)$ (2) $\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup[1,\infty)$

(3) $\left[\frac{-1}{2},0\right]\cup[1,\infty)$ (4) $[0,\infty)$

5. यदि k का न्यूनतम मान, जिसके लिए फलन $f(x)=x\sqrt{kx-x^2}$ अंतराल [0, 3] में वर्धमान है, m है तथा [0, 3] में f का अधिकतम मान जब k = m है, M है, तो क्रमित युग्म (m, M) बराबर है :

(1) $(4, 3\sqrt{2})$ (2) $(4, 3\sqrt{3})$

(3) $(3, 3\sqrt{3})$ (4) $(5, 3\sqrt{6})$

SOLUTION

1. Ans. (4)

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

$$f'(x)=\frac{a^2}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}+\frac{b^2}{\left(b^2+(d-x)^2\right)^{3/2}}>0\ \forall x\in R$$

$f(x)$ is an increasing function.

2. Ans (3)

$f'(x) = 3x^2 - 6(a-2)x + 3a$

$f'(x) \geq 0\ \forall\ x \in (0, 1]$

$f'(x) \leq 0\ \forall\ x \in [1, 5)$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ at $x = 1 \Rightarrow a = 5$

$f(x) - 14 = (x-1)^2 (x-7)$

$$\frac{f(x)-14}{(x-1)^2} = x - 7$$

3. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $\phi(x) = f(x) + f(2-x)$

$\phi'(x) = f'(x) - f'(2-x)$ ......(1)

Since $f''(x) > 0$

$\Rightarrow$ $f'(x)$ is increasing $\forall\ x \in (0, 2)$

Case-I : When $x > 2 - x \Rightarrow x > 1$

$\Rightarrow \phi'(x) > 0\ \forall\ x \in (1, 2)$

$\therefore$ $\phi(x)$ is increasing on $(1, 2)$

Case-II : When $x < 2 - x \Rightarrow x < 1$

$\Rightarrow \phi'(x) < 0\ \forall\ x \in (0,1)$

$\therefore$ $\phi(x)$ is decreasing on $(0, 1)$

4. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $h(x) = f(g(x))$

$\Rightarrow h'(x) = f'(g(x)).\ g'(x)$ and $f'(x) = e^x - 1$

$\Rightarrow h'(x) = (e^{g(x)} - 1)\ g'(x)$

$\Rightarrow h'(x) = \left(e^{x^2-x}-1\right)(2x-1) \geq 0$

Case-I $e^{x^2-x} \geq 1$ and $2x - 1 \geq 0$

$\Rightarrow x \in [1,\infty)$ ......(1)

Case-II $e^{x^2-x} \leq 1$ and $2x - 1 \leq 0$

$\Rightarrow x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.....(2)

Hence, $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \cup [1,\infty)$

5. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $f(x) = x\sqrt{kx-x^2}$

$$f'(x) = \frac{3kx-4x^2}{2\sqrt{kx-x^2}}$$

For $\uparrow$ $f'(x) \geq 0$ | $3kx-4x^2 \geq 0$

$kx - x^2 \geq 0$ | $4x^2-3kx \leq 0$

$x^2 - kx \leq 0$ | $4x(x-\frac{3k}{4}) \leq 0$

$x(x-k) \leq 0$ so $x\in[0, 3]$ | $3-\frac{3k}{4} \leq 0$

+ve $\boxed{x \geq 3}$ | $\boxed{k \geq 4}$

minimum value of k is $\boxed{m = 4}$

$f(x) = x\sqrt{kx-x^2}$

$$= 3\sqrt{4\times 3-3^2} = 3\sqrt{3},\ M = 3\sqrt{3}$$