

HYPERBOLA

1. माना $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ है यदि अतिपरवलय

$$\frac{x^2}{\cos^2 \theta} - \frac{y^2}{\sin^2 \theta} = 1$$

की उत्केन्द्रता 2 से अधिक हो, तो इसके नाभिलम्ब की लम्बाई किस अन्तराल में स्थित होगी :

- (1) (2, 3] (2) (3, ∞)
 (3) (3/2, 2] (4) (1, 3/2]

2. एक अतिपरवलय का केंद्र मूल बिंदु पर है, तथा यह बिंदु (4,2) से होकर जाता है और इसका अनुप्रस्थ (transverse) अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है जिसकी लम्बाई 4 है। तो इस अतिपरवलय की उत्केन्द्रता (eccentricity) है :

- (1) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{3}{2}$
 (3) $\sqrt{3}$ (4) 2

3. अतिपरवलय $4x^2 - 5y^2 = 20$ की एक स्पर्श रेखा जो रेखा $x - y = 2$ के समांतर है, का समीकरण है

- (1) $x - y + 9 = 0$
 (2) $x - y + 7 = 0$
 (3) $x - y + 1 = 0$
 (4) $x - y - 3 = 0$

4. माना $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y^2}{1+r} - \frac{x^2}{1-r} = 1 \right\}$,

जहाँ $r \neq \pm 1$ है। तब S

(1) एक अतिपरवलय को दर्शाता है जिसकी उत्केन्द्रता

$$\frac{2}{\sqrt{r+1}}, \text{ जहाँ } 0 < r < 1 \text{ है।}$$

(2) एक दीर्घवृत्त को दर्शाता है जिसकी उत्केन्द्रता $\frac{1}{\sqrt{r+1}}$,

जहाँ $r > 1$ है।

(3) एक अतिपरवलय को दर्शाता है जिसकी उत्केन्द्रता

$$\frac{2}{\sqrt{1-r}}, \text{ जब } 0 < r < 1 \text{ है।}$$

(4) एक दीर्घवृत्त को दर्शाता है जिसकी उत्केन्द्रता $\sqrt{\frac{2}{r+1}}$,

जब $r > 1$ है।

5. परवलय $y^2 = 4x$ तथा अतिपरवलय $xy = 2$ की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है :

- (1) $x + 2y + 4 = 0$
 (2) $x - 2y + 4 = 0$
 (3) $x + y + 1 = 0$
 (4) $4x + 2y + 1 = 0$

6. यदि एक अतिपरवलय के संयुग्मी अक्ष (conjugate axis) की लंबाई 5 है तथा इसकी नाभियों के बीच की दूरी 13 है, तो इस अतिपरवलय की उत्केन्द्रता है :-

- (1) 2 (2) $\frac{13}{6}$ (3) $\frac{13}{8}$ (4) $\frac{13}{12}$

7. यदि एक अतिपरवलय के शीर्ष $(-2, 0)$ तथा $(2, 0)$ पर हैं तथा इसकी एक नाभि $(-3, 0)$ पर है, तो निम्न में से कौन सा बिन्दु इस अतिपरवलय पर स्थित नहीं है ?

- (1) $(4, \sqrt{15})$ (2) $(-6, 2\sqrt{10})$
 (3) $(6, 5\sqrt{2})$ (4) $(2\sqrt{6}, 5)$

8. यदि बिंदु (4,6) से होकर जाने वाले मानक अतिपरवलय की उत्केन्द्रता 2 है, तो (4,6) पर अतिपरवलय पर खींची गई स्पर्श रेखा का समीकरण है :-

- (1) $2x - y - 2 = 0$
 (2) $3x - 2y = 0$
 (3) $2x - 3y + 10 = 0$
 (4) $x - 2y + 8 = 0$

9. यदि रेखा $y = mx + 7\sqrt{3}$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1$

का अभिलंब है, तो m का एक मान है:

- (1) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (2) $\frac{3}{\sqrt{5}}$
 (3) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (4) $\frac{\sqrt{15}}{2}$

10. एक अतिपरवलय का केन्द्र मूलबिन्दु पर है तथा यह बिन्दु $(4, -2\sqrt{3})$ से होकर जाता है। यदि इसकी एक नियता (directrix) $5x = 4\sqrt{5}$ है e है, तो:
- (1) $4e^4 - 24e^2 + 35 = 0$
 (2) $4e^4 + 8e^2 - 35 = 0$
 (3) $4e^4 - 12e^2 - 27 = 0$
 (4) $4e^4 - 24e^2 + 27 = 0$
11. यदि अतिपरवलय $16x^2 - 9y^2 = 144$ की नियता (directrix) $5x + 9 = 0$ है, तो इसका संगत नाभिकेन्द्र है:
- (1) $(-\frac{5}{3}, 0)$ (2) $(5, 0)$
 (3) $(-5, 0)$ (4) $(\frac{5}{3}, 0)$
12. माना परवलय $y^2 = 12x$ तथा अतिपरवलय $8x^2 - y^2 = 8$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाओं का प्रतिच्छेदन बिन्दु P है। यदि S तथा S' अतिपरवलय की नाभियाँ हैं, जहाँ S धनात्मक x-अक्ष पर स्थित है, तो P, SS' को निम्न में से किस अनुपात में विभाजित करता है ?
- (1) 5:4 (2) 14:13
 (3) 2:1 (4) 13:11

SOLUTION

1. **Ans. (2)**

$$e = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sec \theta$$

$$\text{As, } \sec \theta > 2 \Rightarrow \cos \theta < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta \in (60^\circ, 90^\circ)$$

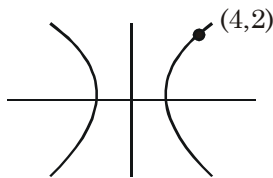
$$\text{Now, } \ell(\text{L}\cdot\text{R}) = \frac{2b^2}{a} = 2 \frac{(1 - \cos^2 \theta)}{\cos \theta}$$

$$= 2(\sec \theta - \cos \theta)$$

Which is strictly increasing, so

$$\ell(\text{L}\cdot\text{R}) \in (3, \infty)$$

2. **Ans. (1)**



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Passes through (4, 2)

$$4 - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow e = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3. **Ans. (3)**

$$\text{Hyperbola } \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$$

slope of tangent = 1

$$\text{equation of tangent } y = x \pm \sqrt{5-4}$$

$$\Rightarrow y = x \pm 1$$

$$\Rightarrow y = x + 1 \text{ or } y = x - 1$$

4. **Ans. (4)**

$$\frac{y^2}{1+r} - \frac{x^2}{1-r} = 1$$

$$\text{for } r > 1, \frac{y^2}{1+r} + \frac{x^2}{r-1} = 1$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{(r-1)}{(r+1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(r+1) - (r-1)}{(r+1)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{r+1}} = \sqrt{\frac{2}{r+1}}$$

Option (4)

5. **Ans. (1)**

Let the equation of tangent to parabola

$$y^2 = 4x \text{ be } y = mx + \frac{1}{m}$$

It is also a tangent to hyperbola $xy = 2$

$$\Rightarrow x \left(mx + \frac{1}{m} \right) = 2$$

$$\Rightarrow x^2 m + \frac{x}{m} - 2 = 0$$

$$D = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

So tangent is $2y + x + 4 = 0$

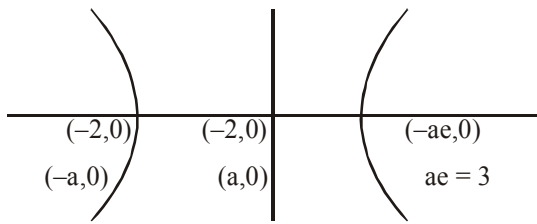
6. **Ans. (4)**

$$2b = 5 \text{ and } 2ae = 13$$

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{169}{4} - a^2$$

$$\Rightarrow a = 6 \Rightarrow e = \frac{13}{12}$$

7. Ans. (3)



$$ae = 3, e = \frac{3}{2}, b^2 = 4\left(\frac{9}{4} - 1\right), b^2 = 5$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

8. Official Ans. by NTA (1)

Sol. Let us Suppose equation of hyperbola is

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$e = 2 \Rightarrow b^2 = 3a^2$$

$$\text{passing through } (4, 6) \Rightarrow a^2 = 4, b^2 = 12$$

\Rightarrow equation of tangent

$$x - \frac{y}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 2x - y - 2 = 0$$

9. Official Ans. by NTA (3)

$$\text{Sol. } \frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{18} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{24}; b = \sqrt{18}$$

Parametric normal :

$$\sqrt{24} \cos \theta \cdot x + \sqrt{18} \cdot y \cot \theta = 42$$

$$\text{At } x = 0 : y = \frac{42}{\sqrt{18}} \tan \theta = 7\sqrt{3} \text{ (from given equation)}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\text{slope of parametric normal} = \frac{-\sqrt{24} \cos \theta}{\sqrt{18} \cot \theta} = m$$

$$\Rightarrow m = -\sqrt{\frac{4}{3}} \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ or } \frac{2}{\sqrt{5}}$$

10. Official Ans. by NTA (1)

$$\text{Sol. Hyperbola is } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{a}{e} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ and } \frac{16}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1$$

$$a^2 = \frac{16}{5}e^2 \dots(1) \text{ and } \frac{16}{a^2} - \frac{12}{a^2(e^2 - 1)} = 1 \dots(2)$$

From (1) & (2)

$$16\left(\frac{5}{16e^2}\right) - \frac{12}{(e^2 - 1)}\left(\frac{5}{16e^2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow 4e^4 - 24e^2 + 35 = 0$$

11. Official Ans. by NTA (3)

$$\text{Sol. } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$a = 3, b = 4 \text{ \& } e = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}$$

corresponding focus will be $(-ae, 0)$ i.e., $(-5, 0)$.

12. Official Ans. by NTA (1)

Sol. Equation of tangents

$$y^2 = 12x \Rightarrow y = 2x + \frac{3}{m}$$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1 \Rightarrow y = mx \pm \sqrt{m^2 - 8}$$

Since they are common tangent

$$\therefore \frac{3}{m} = \pm \sqrt{m^2 - 8} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1 \\ e = 3 \\ ae = 3 \end{array} \right.$$

$$m^4 - 8m^2 - 9 = 0$$

$$m = \pm 3$$

$$\therefore y = 3x + 1 \quad \text{and} \quad y = -3x - 1 \quad \text{P}\left(-\frac{1}{3}, 0\right), S = (3, 0), S' = (-3, 0)$$

