FUNCTION

1. $x \in R - \{0, 1\}$ के लिये, माना $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = 1 - x$ तथा $f_3(x) = \frac{1}{1-x}$ तीन फलन दिये गये है। यदि एक फलन J(x) है, जो $(f_2 o J o f_1)(x) = f_3(x)$ को संतुष्ट करता है, तो J(x) होगा :-

(1) $f_3(x)$ (2) $f_1(x)$

(3) $f_2(x)$ (4) $\frac{1}{x} f_3(x)$

2. माना A={xεR:x एक धन पूर्णांक नहीं है} फलन f:A→R निम्न प्रकार से परिभाषित है $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, तो f एक

(1) एकैकी है, परन्तु आच्छादक फलन नहीं है

(2) एकैकी फलन नहीं है

(3) आच्छादक है, परन्तु एकैकी फलन नहीं है

(4) एकैकी है, परन्तु आच्छादक फलन नहीं है

3. माना N, प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है तथा दो फलन f तथा g है, जो f,g : N→N द्वारा इस प्रकार परिभाषित है

कि $f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{यदि n विषम} \\ \frac{n}{2} & \text{यदि n सम} \end{cases}$ तथा

$g(n) = n-(-1)^n$ है। तब fog होगा

(1) एकैकी तथा आच्छादक दोनों होगा।

(2) एकैकी परन्तु आच्छादक नहीं होगा।

(3) ना तो एकैकी ना ही आच्छादक होगा।

(4) आच्छादक परन्तु एकैकी नहीं होगा।

4. माना f : R → R, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in R$ द्वारा परिभाषित किया गया है, तो f का परिसर है :

(1) $(-1, 1) - \{0\}$ (2) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

(3) $R - \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (4) $R - [-1, 1]$

5. माना एक फलन $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$ द्वारा परिभाषित है, तो f होगा–

(1) केवल एकैकी होगा।

(2) एकैकी नही होगा परन्तु ये आच्छादक होगा।

(3) दोनों एकैकी के साथ-साथ आच्छादक भी होगा।

(4) ना तो एकैकी ना ही आच्छादक होगा।

6. {1, 2, 3, ..., 20} से {1, 2, 3, ..., 20} पर ऐसे आच्छादक फलनों, जिनके लिये f(k) तीन का गुणज है जब k चार का गुणज है, की संख्या है :-

(1) $(15)! \times 6!$ (2) $5^6 \times 15$

(3) $5! \times 6!$ (4) $6^5 \times (15)!$

7. यदि $f(x) = \log_e\left(\frac{1-x}{1+x}\right), |x| < 1$, है, तो $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ बराबर है –

(1) $2f(x)$ (2) $2f(x^2)$

(3) $(f(x))^2$ (4) $-2f(x)$

8. माना $f(x) = a^x$ $(a > 0)$ को $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, के रूप में लिखा गया है जबकि $f_1(x)$ एक सम फलन है और $f_2(x)$ एक विषम फलन है, तो $f_1(x + y) + f_1(x - y)$ बराबर है :-

(1) $2f_1(x)f_1(y)$

(2) $2f_1(x)f_2(y)$

(3) $2f_1(x + y)f_2(x - y)$

(4) $2f_1(x + y)f_1(x - y)$

9. माना $\sum_{k=1}^{10} f(a+k) = 16(2^{10}-1)$ है, जहाँ सभी प्राकृत संख्याओं x, y के लिए, फलन f, $f(x + y) = f(x)f(y)$ को संतुष्ट करता है तथा $f(1) = 2$ है। तो प्राकृत संख्या 'a' बराबर है

(1) 4 (2) 3 (3) 16 (4) 2

10. यदि फलन $f : R - \{1, -1\} \to A$, $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ द्वारा परिभाषित है तथा आच्छादी (surjective) है, तो A बराबर है

(1) $R - [-1, 0)$

(2) $R - (-1, 0)$

(3) $R - \{-1\}$

(4) $[0, \infty)$

11. $f(x)=\frac{1}{4-x^2}+\log_{10}(x^3-x)$ द्वारा परिभाषित फलन का प्रांत है :-

(1) $(1, 2) \cup (2, \infty)$

(2) $(-1, 0) \cup (1, 2) \cup (3, \infty)$

(3) $(-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

(4) $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, \infty)$

12. माना $f(x) = x^2$, $x \in R$ किसी भी $A \subseteq R$, के लिए $g(A) = \{x \in R, f(x) \in A\}$ है। यदि $S = [0, 4]$ है, तो निम्न में से कौन सा एक कथन सही **नहीं** है ?

(1) $f(g(S)) \neq f(S)$ (2) $f(g(S)) = S$

(3) $g(f(S)) = g(S)$ (4) $g(f(S)) \neq S$

13. समीकरण $5 + |2^x - 1| = 2^x (2^x - 2)$ के वास्तविक मूलों की संख्या है:

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 1

14. $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ के लिए माना $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \tan x$ तथा $h(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$. यदि $\phi(x) = ((hof)og)(x)$, तो $\phi=\left(\frac{\pi}{3}\right)$ बराबर है :

(1) $\tan\frac{\pi}{12}$ (2) $\tan\frac{7\pi}{12}$

(3) $\tan\frac{11\pi}{12}$ (4) $\tan\frac{5\pi}{12}$

15. $x \in R$, के लिए माना $[x]$, x के समान या उससे कम महत्तम पूर्णांक को दर्शाता है, तो श्रेणी

$$\left[-\frac{1}{3}\right]+\left[-\frac{1}{3}-\frac{1}{100}\right]+\left[-\frac{1}{3}-\frac{2}{100}\right]+.....+\left[-\frac{1}{3}-\frac{99}{100}\right]$$

का योग है :

(1) –153 (2) –133 (3) –131 (4) –135

SOLUTION

1. Ans. (1)

Given $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_2(x) = 1 - x$ and $f_3(x) = \dfrac{1}{1-x}$

$(f_2 \circ J \circ f_1)(x) = f_3(x)$

$f_2 \circ \left(J\left(f_1(x)\right)\right) = f_3\ (x)$

$f_2 \circ \left(J\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{1-x}$

$1 - J\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{1-x}$

$J\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{-x}{1-x} = \dfrac{x}{x-1}$

Now $x \to \dfrac{1}{x}$, $J(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \dfrac{1}{1-x} = f_3(x)$

2. Ans. (1)

$f(x) = 2\left(1 + \dfrac{1}{x-1}\right)$

$f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2}$

$\Rightarrow f$ is one-one but not onto

3. Ans. (4)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2} & n \text{ is odd} \\ n/2 & n \text{ is even} \end{cases}$$

$$g(x) = n - (-1)^n \begin{cases} n+1\ ; & n \text{ is odd} \\ n-1\ ; & n \text{ is even} \end{cases}$$

$$f(g(n)) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}; & n \text{ is even} \\ \dfrac{n+1}{2}; & n \text{ is odd} \end{cases}$$

$\therefore$ many one but onto

Option (4)

4. Ans. (2)

$f(0) = 0$ & $f(x)$ is odd.

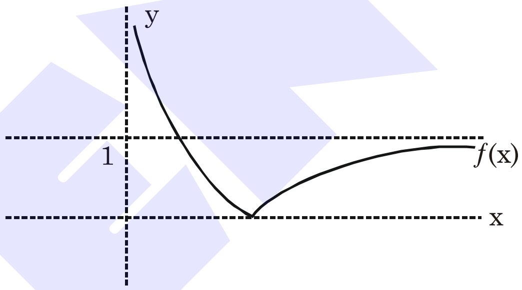
Further, if $x > 0$ then

$f(x) = \dfrac{1}{x + \frac{1}{x}} \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right]$

Hence, $f(x) \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

5. Ans. (Bonus)

$$f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right| = \frac{|x-1|}{x} = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x} & 0 < x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{x} & x \ge 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow f(x)$ is not injective

but range of function is $[0,\infty)$

Remark : If co-domain is $[0,\infty)$, then $f(x)$ will be surjective

6. Ans. (1)

$f(k) = 3m$ (3,6,9,12,15,18)

for k = 4,8,12,16,20 6.5.4.3.2 ways

For rest numbers 15! ways

Total ways = 6!(15!)

7. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $f(x) = \log_e\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right), |x| < 1$

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \ell n\left(\frac{1 - \frac{2x}{1+2x^2}}{1 + \frac{2x}{1+x^2}}\right)$$

$$= \ell n\left(\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}\right) = 2\ell n\left|\frac{1-x}{1+x}\right| = 2f(x)$$

8. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $f(x) = a^x$, $a > 0$

$$f(x)=\frac{a^x+a^{-x}+a^x-a^{-x}}{2}$$

$$\Rightarrow f_1(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$$

$$f_2(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$$

$$\Rightarrow f_1(x+y)+f_1(x-y)$$

$$=\frac{a^{x+y}+a^{-x-y}}{2}+\frac{a^{x-y}+a^{-x+y}}{2}$$

$$=\frac{(a^x+a^{-x})}{2}(a^y+a^{-y})$$

$$=f_1(x)\times 2f_1(y)$$

$$=2f_1(x)\,f_1(y)$$

9. Official Ans. by NTA (2)

Sol. From the given functional equation :

$f(x) = 2^x \quad \forall x \in N$

$2^{a+1} + 2^{a+2}+....+2^{a+10} = 16(2^{10} - 1)$

$2^a (2 + 2^2+....+2^{10}) = 16(2^{10} - 1)$

$$2^a.\frac{2.(2^{10}-1)}{1}=16(2^{10}-1)$$

$2^{a+1} = 16 = 2^4$

$a = 3$

10. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$

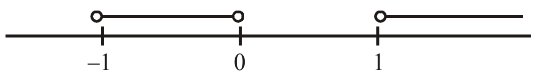
Range of y : R –[–1,0)

for surjective funciton, A must be same as above range.

11. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $4 - x^2 \neq 0$; $x^3 - x > 0$

$x = \pm 2 \qquad x(x - 1)(x + 1) > 0$



$\therefore D_f \in (-1, 0) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

12. Official Ans. by NTA (3)

Sol. g(S) = [–2, 2]

So, f(g(S)) = [0, 4] = S

And f(S) = [0, 16] $\Rightarrow$ f(g(S) $\neq$ f(S)

Also, g(f(S)) = [–4, 4] $\neq$ g (S)

So, g(f(S) $\neq$ S

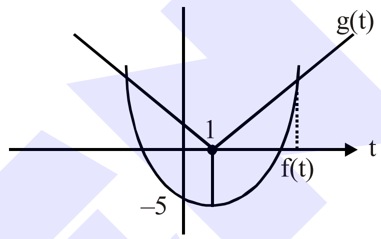
13. Official Ans. by NTA (4)

Sol. Let $2^x = t$

$5 + |t - 1| = t^2 - 2t$

$\Rightarrow \underbrace{|t - 1|}_{g(t)} = \underbrace{(t^2 - 2t - 5)}_{f(t)}$

From the graph



$\because t > 0$

So, number of real root is 1.

14. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \tan x$, $h(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$fog(x) = \sqrt{\tan x}$

$$hofog(x) = h(\sqrt{\tan x}) = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$$

$$= -\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$\phi(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$\phi\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\tan\frac{\pi}{12}$$

$$=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)=\tan\frac{11\pi}{12}$$

15. Official Ans. by NTA (2)

Sol.

$$\underbrace{\left[-\frac{1}{3}\right]+\left[-\frac{1}{3}-\frac{1}{100}\right]+...+\left[-\frac{1}{3}-\frac{66}{100}\right]}_{(-1)67}$$

$$+\underbrace{\left[-\frac{1}{3}-\frac{67}{100}\right]+...+\left[-\frac{1}{3}-\frac{99}{100}\right]}_{-2(33)}=-133$$