

ELLIPSE

1. यदि दीर्घवृत्त $x^2 + 2y^2 = 2$ के चार शीर्षों के अतिरिक्त इसके सभी बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएँ खींची गई हैं, तो इन स्पर्श रेखाओं के निर्देशांक अक्षों के बीच के अंतः खंडों के मध्य बिन्दु निम्न में से किस वक्र पर है :
- (1) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ (2) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$
- (3) $\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4y^2} = 1$ (4) $\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2y^2} = 1$
2. माना एक दीर्घवृत्त, जिसका दीर्घ-अक्ष x -अक्ष के अनुदिश है तथा केंद्र मूलबिन्दु पर है, के नाभिलम्ब की लंबाई 8 है। यदि दीर्घवृत्त की नाभियों के बीच की दूरी, इसके लघु-अक्ष की लंबाई के समान हो, तो निम्न में से कौन-सा बिन्दु इस पर स्थित है?
- (1) $(4\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$
- (2) $(4\sqrt{3}, 2\sqrt{2})$
- (3) $(4\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
- (4) $(4\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$
3. माना S तथा S' दीर्घवृत्त की नाभि है तथा इसके लघुअक्ष का कोई एक सिरा B है। यदि त्रिभुज $S'BS$ एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B = 90^\circ$ तथा क्षेत्रफल $(\Delta S'BS) = 8$ वर्ग इकाई हो, तो दीर्घवृत्त के नाभिलम्ब की लम्बाई होगी:
- (1) $2\sqrt{2}$ (2) 2
- (3) 4 (4) $4\sqrt{2}$
4. यदि दीर्घवृत्त $4x^2 + y^2 = 8$ के बिन्दुओं $(1, 2)$ तथा (a, b) पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हैं, तो a^2 बराबर है -
- (1) $\frac{64}{17}$ (2) $\frac{2}{17}$
- (3) $\frac{128}{17}$ (4) $\frac{4}{17}$
5. यदि एक दीर्घवृत्त जिसका केंद्र मूलबिन्दु पर है, के दीर्घ अक्ष तथा लघु अक्ष की लंबाइयों का अंतर 10 है तथा एक नाभिकेंद्र $(0, 5\sqrt{3})$ पर है, तो इसके नाभिलंब की लंबाई है :-
- (1) 10 (2) 8 (3) 5 (4) 6
6. यदि रेखा, $x - 2y = 12$ दीर्घवृत्त, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को बिन्दु $(3, \frac{-9}{2})$ पर स्पर्श करती है, तो इसके नाभिलम्ब की लम्बाई है:
- (1) 9 (2) $8\sqrt{3}$ (3) $12\sqrt{2}$ (4) 5
7. दीर्घवृत्त $3x^2 + 5y^2 = 32$ के बिन्दु $P(2, 2)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा अभिलंब, x -अक्ष को क्रमशः Q तथा R पर काटते हैं। तो त्रिभुज PQR का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) है :
- (1) $\frac{14}{3}$ (2) $\frac{16}{3}$ (3) $\frac{68}{15}$ (4) $\frac{34}{15}$
8. यदि दीर्घवृत्त $3x^2 + 4y^2 = 12$ के एक बिन्दु P पर अभिलम्ब, रेखा $2x + y = 4$ के समान्तर है तथा P पर दीर्घवृत्त की स्पर्श रेखा $Q(4, 4)$ से होकर जाती है, तो PQ बराबर है :
- (1) $\frac{\sqrt{221}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{157}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{61}}{2}$ (4) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$
9. एक दीर्घवृत्त, जिसकी नाभियाँ $(0, 2)$ तथा $(0, -2)$ पर हैं तथा जिसके लघु अक्ष की लम्बाई 4 है, निम्न में से किस बिन्दु से होकर जाता है ?
- (1) $(1, 2\sqrt{2})$ (2) $(2, \sqrt{2})$
- (3) $(2, 2\sqrt{2})$ (4) $(\sqrt{2}, 2)$

SOLUTION

1. Ans. (3)

Equation of general tangent on ellipse

$$\frac{x}{a \sec \theta} + \frac{y}{b \operatorname{cosec} \theta} = 1$$

$$a = \sqrt{2}, b = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2} \sec \theta} + \frac{y}{\operatorname{cosec} \theta} = 1$$

Let the midpoint be (h, k)

$$h = \frac{\sqrt{2} \sec \theta}{2} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}h}$$

$$\text{and } k = \frac{\operatorname{cosec} \theta}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2k}$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{4k^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4y^2} = 1$$

2. Ans. (2)

$$\frac{2b^2}{a} = 8 \text{ and } 2ae = 2b$$

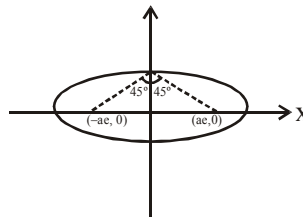
$$\Rightarrow \frac{b}{a} = e \text{ and } 1 - e^2 = e^2 \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow b = 4\sqrt{2} \text{ and } a = 8$$

$$\text{so equation of ellipse is } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1$$

3. Ans. (3)

$$m_{SB} \cdot m_{S'B} = -1$$



$$b^2 = a^2 e^2 \quad \dots (i)$$

$$\frac{1}{2} S'B \cdot SB = 8$$

$$S'B \cdot SB = 16$$

$$a^2 e^2 + b^2 = 16 \quad \dots (ii)$$

$$b^2 = a^2 (1 - e^2) \quad \dots (iii)$$

using (i), (ii), (iii)

$$a = 4$$

$$b = 2\sqrt{2}$$

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore l \text{ (L.R)} = \frac{2b^2}{a} = 4 \quad \boxed{\text{Ans.3}}$$

4. Official Ans. by NTA (2)

$$\text{Sol. } 4a^2 + b^2 = 8 \quad \dots (1)$$

$$\text{also } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,2)} = -\frac{4x}{y} = -2$$

$$\Rightarrow -\frac{4a}{b} = \frac{1}{2}$$

$$b = -8a$$

$$\Rightarrow b^2 = 64a^2$$

$$68a^2 = 8$$

$$a^2 = \frac{2}{17}$$

5. Official Ans. by NTA (3)

Sol. Let equation of ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$2a - 2b = 10 \dots(1)$

$ae = 5\sqrt{3} \dots(2)$

$\frac{2b^2}{a} = ?$

$b^2 = a^2(1 - e^2)$

$b^2 = a^2 - a^2e^2$

$b^2 = a^2 - 25 \times 3$

$\Rightarrow b = 5$ and $a = 10$

\therefore length of L.R. = $\frac{2(25)}{10} = 5$

6. Official Ans. by NTA (1)

Sol. Tangent at $(3, -\frac{9}{2})$

$\frac{3x}{a^2} - \frac{9y}{2b^2} = 1$

Comparing this with $x - 2y = 12$

$\frac{3}{a^2} = \frac{9}{4b^2} = \frac{1}{12}$

we get $a = 6$ and $b = 3\sqrt{3}$

L(LR) = $\frac{2b^2}{a} = 9$

7. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $3x^2 + 5y^2 = 32$

$\frac{dy}{dx} \Big|_{(2,2)} = -\frac{3}{5}$

Tangent : $y - 2 = -\frac{3}{5}(x - 2) \Rightarrow Q(\frac{16}{3}, 0)$

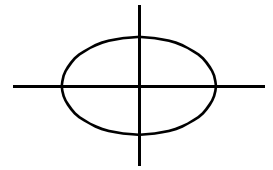
Normal : $y - 2 = \frac{5}{3}(x - 2) \Rightarrow R(\frac{4}{5}, 0)$

Area is = $\frac{1}{2}(QR) \times 2 = QR = \frac{68}{15}$

8. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $3x^2 + 4y^2 = 12$

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$



$x = 2\cos\theta, y = \sqrt{3}\sin\theta$

Let $P(2\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$

Equation of normal is $\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$

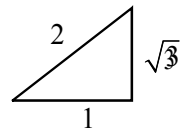
$2x\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta y = \sin\theta\cos\theta$

Slope $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\theta = -2 \therefore \tan\theta = -\sqrt{3}$

Equation of tangent is
it passes through (4, 4)

$3x\cos\theta + 2\sqrt{3}\sin\theta y = 6$

$12\cos\theta + 8\sqrt{3}\sin\theta = 6$



$\cos\theta = -\frac{1}{2}, \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \therefore \theta = 120^\circ$

Hence point P is $(2\cos 120^\circ, \sqrt{3}\sin 120^\circ)$

$P(-1, \frac{3}{2}), Q(4, 4)$

$PQ = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

9. Official Ans. by NTA (4)

Sol. given that $be = 2$ and $a = 2$

(here $a < b$)

$\therefore a^2 = b^2(1 - e^2)$

$\therefore b^2 = 8$

\therefore equation of ellipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$