DIFFERENTIAL EQUATION

1. यदि $y = y(x)$ अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$ का हल है जो $y(1) = 1$ को संतुष्ट करता है, तो $y\left(\frac{1}{2}\right)$ का मान होगा :

(1) $\frac{7}{64}$ (2) $\frac{13}{16}$

(3) $\frac{49}{16}$ (4) $\frac{1}{4}$

2. माना $f:[0,1]\rightarrow R$ इस प्रकार है कि सभी $x,y,\varepsilon[0,1]$ के लिए $f(xy) = f(x).f(y)$ $x,y,\varepsilon[0,1]$ है तथा $f(0)\neq 0$ है। यदि $y = y(x)$ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(x)$ को संतुष्ट करता है और $y(0) = 1$ है, तो $y\left(\frac{1}{4}\right)+y\left(\frac{3}{4}\right)$ बराबर है

(1) 4 (2) 3 (3) 5 (4) 2

3. यदि $\frac{dy}{dx}+\frac{3}{\cos^2 x}y=\frac{1}{\cos^2 x}, x\in\left(\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ तथा $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{3}$ है, तो $y\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ बराबर है :

(1) $\frac{1}{3}+e^6$ (2) $\frac{1}{3}$

(3) $-\frac{4}{3}$ (4) $\frac{1}{3}+e^3$

4. माना f एक अवकलनीय फलन इस प्रकार है कि $f'(x)=7-\frac{3}{4}\frac{f(x)}{x},(x>0)$ तथा $f(1) \neq 4$ है। तब $\lim_{x\to 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right)$ होगा

(1) विद्यमान तथा 4 के बराबर

(2) विद्यमान नहीं होगा।

(3) विद्यमान तथा 0 के बराबर

(4) विद्यमान तथा $\frac{4}{7}$ के बराबर

5. अवकल समीकरण $(x^2 - y^2)dx + 2xy\, dy = 0$ द्वारा प्रदर्शित वक्रों के निकायों के बीच वक्र, जो बिन्दु (1,1) से गुजरता है, होगा

(1) एक वृत्त होगा जिसका केन्द्र y-अक्ष पर स्थित होगा।

(2) एक वृत्त होगा जिसका केन्द्र x-अक्ष पर स्थित होगा।

(3) एक दीर्घवृत्त होगा जिसका दीर्घ अक्ष y-अक्ष के अनुदिश होगा

(4) एक अतिपरलवय होगा जिसका अनुप्रस्थ अक्ष x-अक्ष के अनुदिश होगा

6. यदि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x}$, $x > 0$ का हल $y(x)$ है, जहाँ $y(1) = \frac{1}{2}e^{-2}$, तो :

(1) (0,1) में y(x) ह्रासमान है।

(2) $\left(\frac{1}{2},1\right)$ में y(x) ह्रासमान है।

(3) $y(\log_e 2) = \frac{\log_e 2}{4}$

(4) $y(\log_e 2) = \log_e 4$

7. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = (x-y)^2$, जबकि $y(1) = 1$ है, का हल है :

(1) $\log_e\left|\frac{2-y}{2-x}\right| = 2(y-1)$

(2) $\log_e\left|\frac{2-x}{2-y}\right| = x-y$

(3) $-\log_e\left|\frac{1+x-y}{1-x+y}\right| = x+y-2$

(4) $-\log_e\left|\frac{1-x+y}{1+x-y}\right| = 2(x-1)$

8. माना y = y(x), अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}+y=x\log_e x,(x>1)$ का हल है। यदि $2y(2)=\log_e 4-1$ है, तो y(e) बराबर है :-

(1) $\frac{e^2}{4}$ (2) $\frac{e}{4}$ (3) $-\frac{e}{2}$ (4) $-\frac{e^2}{2}$

9. यदि एक वक्र, बिन्दु (1, –2) से गुजरता है तथा इस वक्र पर स्थित किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{x^2-2y}{x}$ हो, तो वक्र किस बिन्दु से गुजरेगा :

(1) $\left(-\sqrt{2},1\right)$ (2) $\left(\sqrt{3},0\right)$

(3) (–1, 2) (4) (3, 0)

10. माना y = y(x) अवकल समीकरण

$\left(x^2+1\right)^2\frac{dy}{dx}+2x\left(x^2+1\right)y=1$ का हल है, जबकि

y(0) = 0 है। यदि $\sqrt{a}\,y(1)=\frac{\pi}{32}$ है, तो 'a' का मान है -

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{16}$

(3) $\frac{1}{4}$ (4) 1

11. दिया है कि वक्र y = y(x) के किसी बिंदु (x,y) पर खींची गई स्पर्श रेखा की ढाल (slople) $\frac{2y}{x^2}$ है यदि यह वक्र, वृत्त $x^2+y^2-2x-2y=0$ के केंद्र से होकर जाता है, तो इसका समीकरण है:–

(1) $x\log_e|y| = 2(x-1)$

(2) $x\log_e|y| = x-1$

(3) $x^2\log_e|y| = -2(x-1)$

(4) $x\log_e|y| = -2(x-1)$

12. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2\ (x\neq 0)$ का हल जिसके लिए y(1) = 1 है, है

(1) $y=\frac{x^3}{5}+\frac{1}{5x^2}$ (2) $y=\frac{4}{5}x^3+\frac{1}{5x^2}$

(3) $y=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}$ (4) $y=\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4x^2}$

13. यदि $\cos x\frac{dy}{dx}-y\sin x=6x,(0<x<\frac{\pi}{2})$ तथा $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$ है, तो $y\left(\frac{\pi}{6}\right)$ बराबर है :-

(1) $-\frac{\pi^2}{4\sqrt{3}}$ (2) $-\frac{\pi^2}{2}$

(3) $-\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$ (4) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$

14. यदि y = y (x), अवकल समीकरण

$\frac{dy}{dx}$ = (tanx –y) $\sec^2 x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

जबकि y(0) = 0 का हल है, तो $y\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ बराबर है :

(1) $2+\frac{1}{e}$ (2) $\frac{1}{2}-e$ (3) e – 2 (4) $\frac{e}{2}-2$

15. माना y = y(x) अवकल समीकरण,

$\frac{dy}{dx} + y\tan x = 2x + x^2 \tan x$,

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, जबकि y(0) = 1 है, का हल है। तो:

(1) $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

(2) $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) - y'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi - \sqrt{2}$

(3) $y\left(\frac{\pi}{4}\right) - y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

(4) $y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} + 2$

16. अवकल समीकरण $y^2dx + \left(x - \frac{1}{y}\right)dy = 0$ पर विचार कीजिए। यदि x = 1 पर y का मान 1 है, तो x का मान, जिसके लिए y = 2 है, हैं :

(1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{e}}$ (2) $\frac{3}{2} - \sqrt{e}$

(3) $\frac{5}{2} + \frac{1}{\sqrt{e}}$ (4) $\frac{3}{2} - \frac{1}{\sqrt{e}}$

17. अवकल समीकरण $(y^2 - x^3)\, dx - xydy = 0\ (x \neq 0)$ का व्यापक हल है :

(जहाँ c एक समाकलन अचर है)

(1) $y^2 + 2x^3 + cx^2 = 0$

(2) $y^2 + 2x^2 + cx^3 = 0$

(3) $y^2 - 2x^3 + cx^2 = 0$

(4) $y^2 - 2x^2 + cx^3 = 0$

SOLUTION

1. Ans. (3)

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2}{x}\right)y=x$$

$\Rightarrow$ I.F. = x^2

$\therefore yx^2=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}$ (As, y(1) = 1)

$\therefore y\left(x=\frac{1}{2}\right)=\frac{49}{16}$

2. Ans. (2)

$f(xy) = f(x).\ f(y)$

$f(0) = 1$ as $f(0) \neq 0$

$\Rightarrow f(x) = 1$

$$\frac{dy}{dx}=f(x)=1$$

$\Rightarrow y=x+c$

At, x = 0, y = 1 $\Rightarrow$ c = 1

y = x + 1

$$\Rightarrow y\left(\frac{1}{4}\right)+y\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}+1+\frac{3}{4}+1=3$$

3. Ans. (1)

$$\frac{dy}{dx}+3\sec^2 x.y=\sec^2 x$$

I.F. = $e^{3\int \sec^2 x dx}=e^{3\tan x}$

or $y.e^{3\tan x}=\int \sec^2 x.e^{3\tan x}dx$

or $y.e^{3\tan x}=\frac{1}{3}e^{3\tan x}+C$ ....(1)

Given

$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{4}{3}.e^3=\frac{1}{3}e^3+C$

$\therefore$ C = e^3

Now put $x=-\frac{\pi}{4}$ in equation (1)

$\therefore y.e^{-3}=\frac{1}{3}e^{-3}+e^3$

$\therefore y=\frac{1}{3}+e^6$

$\therefore y\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}+e^6$

4. Ans. (1)

$f'(x) = 7 - \frac{3}{4}\frac{f(x)}{x} \quad (x > 0)$

Given $f(1) \neq 4 \quad \lim_{x\to 0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{4}\frac{y}{x} = 7$ (This is LDE)

IF = $e^{\int \frac{3}{4x}dx} = e^{\frac{3}{4}\ln|x|} = x^{\frac{3}{4}}$

$y.x^{\frac{3}{4}} = \int 7.x^{\frac{3}{4}}dx$

$y.x^{\frac{3}{4}} = 7.\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + C$

$f(x) = 4x + C.x^{-\frac{3}{4}}$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x} + C.x^{\frac{3}{4}}$

$\lim_{x\to 0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(4 + C.x^{\frac{7}{4}}\right) = 4$

$\therefore$ Option (1)

5. Ans. (2)

$(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$

Put $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

Solving we get,

$\int \frac{2v}{v^2+1}dv = \int -\frac{dx}{x}$

$\ln(v^2 + 1) = -\ln x + C$

$(y^2 + x^2) = Cx$

$1 + 1 = C \Rightarrow C = 2$

$\boxed{y^2 + x^2 = 2x}$

$\therefore$ Option (2)

6. Ans. (2)

$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x}$

I.F. $= e^{\int\left(\frac{2x+1}{x}\right)dx} = e^{\int\left(2+\frac{1}{x}\right)dx} = e^{2x+\ell nx} = e^{2x}.x$

So, $y(xe^{2x}) = \int e^{-2x}.xe^{2x} + C$

$\Rightarrow xye^{2x} = \int x\,dx + C$

$\Rightarrow 2xye^{2x} = x^2 + 2C$

It passess through $\left(1, \frac{1}{2}e^{-2}\right)$ we get C = 0

$y = \frac{xe^{-2x}}{2}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^{-2x}(-2x+1)$

$\Rightarrow f(x)$ is decreasing in $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

$y(\log_e 2) = \frac{(\log_e 2)e^{-2(\log_e 2)}}{2}$

$= \frac{1}{8}\log_e 2$

7. Ans. (4)

$x - y = t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dt}{dx}$

$\Rightarrow 1 - \frac{dt}{dx} = t^2 \Rightarrow \int \frac{dt}{1-t^2} = \int 1dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ell n\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = x + \lambda$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ell n\left(\frac{1+x-y}{1-x+y}\right) = x + \lambda$ given y(1) = 1

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ell n(1) = 1 + \lambda \Rightarrow \lambda = -1$

$\Rightarrow \ell n\left(\frac{1+x-y}{1-x+y}\right) = 2(x-1)$

$\Rightarrow -\ell n\left(\frac{1-x+y}{1+x-y}\right) = 2(x-1)$

8. Ans. (2)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}=\ell n\,x$$

$$e^{\int \frac{1}{x}dx}=x$$

$$xy=\int x\ell nx+C$$

$$\ell n\,x\frac{x^2}{2}-\int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}$$

$xy=\frac{x}{2}\ell n\,x-\frac{x^2}{4}$ +C, for 2y(2)= $2\ell n2-1$

$\Rightarrow C = 0$

$$y=\frac{x}{2}\ell n\,x-\frac{x}{4}$$

$$y(e)=\frac{e}{4}$$

9. Ans. (2)

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-2y}{x}$ (Given)

$$\frac{dy}{dx}+2\frac{y}{x}=x$$

$$I.F=e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2$$

$\therefore\ y.x^2=\int x.x^2dx+C=\frac{x^4}{y}+C$

hence bpasses through (1, –2) $\Rightarrow$ $C=-\frac{9}{4}$

$\therefore\ yx^2=\frac{x^4}{4}-\frac{9}{4}$

Now check option(s) , Which is satisly by option (ii)

10. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)y=\frac{1}{(x^2+1)^2}$

(Linear differential equation)

$\therefore$ I.F. = $e^{\ell n(x^2+1)}=(x^2+1)$

So, general solution is $y.(x^2+1)=\tan^{-1}x+c$

As y(0) = 0 $\Rightarrow$ c = 0

$\therefore\ y(x)=\frac{\tan^{-1}x}{x^2+1}$

As, $\sqrt{a}.\ y(1)=\frac{\pi}{32}$

$\Rightarrow\ \sqrt{a}=\frac{1}{4}\Rightarrow a=\frac{1}{16}$

11. Official Ans. by NTA (1)

Sol. given $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x^2}$

$\Rightarrow\int\frac{dy}{2y}=\int\frac{dx}{x^2}$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\ell ny=-\frac{1}{x}+c$

passes through centre (1,1)

$\Rightarrow c=1$

$\Rightarrow x\ell ny=2(x-1)$

12. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $x\frac{dy}{dx}+2y=x^2:y(1)=1$

$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2}{x}\right)y=x$ (LDE in y)

$$IF=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ell nx}=x^2$$

$$y.(x^2)=\int x.x^2dx=\frac{x^4}{4}+C$$

y(1) =1

$$1=\frac{1}{4}+C\Rightarrow C=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$yx^2=\frac{x^4}{4}+\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{x^2}{4}+\frac{3}{4x^2}$$

13. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $\frac{dy}{dx} - y\tan x = 6x\sec x$

$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0\,;\, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 7$

$e^{\int pdx} = e^{-\int \tan x dx} = e^{\ell n \cos x} = \cos x$

$y \cdot \cos x = \int 6x\sec x \cos x\, dx$

$y.\cos x = \frac{6x^2}{2} + C$

$y = 3x^2 \sec x + C\sec x$

$0 = 3\cdot\frac{\pi^2}{9}\cdot(2) + C(2)$

$2C = \frac{-2\pi^2}{3} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{\pi^2}{3}}$

$y(\pi/6) = 3\cdot\frac{\pi^2}{36}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\frac{\pi^2}{3}\right)$

$\Rightarrow\ y = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$

14. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $\frac{dy}{dx} = (\tan x - y)\sec^2 x$

Now, put $\tan x = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \sec^2 x$

So $\frac{dy}{dt} + y = t$

On solving, we get $ye^t = e^t(t-1) + c$

$\Rightarrow y = (\tan x - 1) + ce^{-\tan x}$

$\Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow y = \tan x - 1 + e^{-\tan x}$

So $y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = e - 2$

15. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $\frac{dy}{dx} + y(\tan x) = 2x + x^2\tan x$

$I.F = e^{\int \tan x\, dx} = e^{\ln .\sec x} = \sec x$

$\therefore\ y \cdot \sec x = \int\left(2x + x^2\tan x\right)\sec x.dx$

$= \int 2x\sec x\, dx + \int x^2(\sec x.\tan x)dx$

$y\sec x = x^2\sec x + \lambda$

$\Rightarrow y = x^2 + \lambda\cos x$

$y(0) = 0 + \lambda = 1 \qquad \Rightarrow \lambda = 1$

$y = x^2 + \cos x$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y'(x) = 2x - \sin x$

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y'\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \frac{-\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) - y'\left(\frac{-\pi}{4}\right) = \pi - \sqrt{2}$

16. Official Ans. by NTA (4)

Sol. $y^2dx + xdy = \frac{dy}{y}$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y^2}=\frac{1}{y^3}$$

$$IF = e^{\int\frac{1}{y^2}dy}=e^{-\frac{1}{y}}$$

$$e^{-\frac{1}{y}}\cdot x=\int e^{-\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{y^3}dy+C$$

$$xe^{-\frac{1}{y}}=e^{-\frac{1}{y}}+\frac{e^{-\frac{1}{y}}}{y}+C$$

$$C = -\frac{1}{e}$$

$x = \frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{e}}$ when $y = 2$

17. Official Ans. by NTA (1)

Sol. $xy\frac{dy}{dx}-y^2+x^3=0$

put $y^2=k\Rightarrow y\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{dk}{dx}$

$\therefore$ given differential equation becomes

$$\frac{dk}{dx}+k\left(-\frac{2}{x}\right)=-2x^2$$

$$I.F. = e^{\int-\frac{2}{x}dx}=\frac{1}{x^2}$$

$\therefore$ solution is $k\cdot\frac{1}{x^2}=\int-2x^2\cdot\frac{1}{x^2}dx+\lambda$

$y^2 + 2x^3 = \lambda x^2$

take $\lambda = -c$ (integration constant)