DETERMINANT

1. रेखीय समीकरण निकाय

$x + y + z = 2$

$2x + 3y + 2z = 5$

$2x + 3y + (a^2 - 1)z = a + 1$

(1) का $a = 4$ के लिये अनंत हल होगा

(2) का असंगत हल होगा जब $|a| = \sqrt{3}$ है

(3) का असंगत हल होगा जब $a = 4$ है

(4) का $|a| = \sqrt{3}$ के लिये एक अद्वितीय हल होगा

2. यदि रैखिक समीकरण निकाय

$x-4y+7z = g$

$3y - 5z = h$

$-2x + 5y - 9z = k$

संगत (consistent) है, तो :

(1) $g + h + k = 0$ (2) $2g + h + k = 0$

(3) $g + h + 2k = 0$ (4) $g + 2h + k = 0$

3. यदि समीकरण निकाय

$x+y+z = 5$

$x+2y+3z = 9$

$x+3y+\alpha z = \beta$

के असंख्य हल हैं, तो $\beta-\alpha$ बराबर है

(1) 5 (2) 18 (3) 21 (4) 8

4. माना $d \in R$ तथा

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4+d & (\sin\theta)-2 \\ 1 & (\sin\theta)+2 & d \\ 5 & (2\sin\theta)-d & (-\sin\theta)+2+2d \end{bmatrix},$$

$\theta \in [0,2\pi]$ । यदि det(A) का न्यूनतम मान 8 है, तो d का एक मान है :

(1) -7 (2) $2\left(\sqrt{2}+2\right)$

(3) -5 (4) $2\left(\sqrt{2}+1\right)$

5. माना $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ गुणोत्तर श्रेणी में है जिसमें $i = 1,2,\ldots, 10$ के लिये $a_i > 0$ है तथा युग्मों (r,k), $r, k \in N$ (प्राकृत संख्याओं का समुच्चय) का समुच्चय S है जिसके लिये

$$\begin{vmatrix} \log_e a_1^r a_2^k & \log_e a_2^r a_3^k & \log_e a_3^r a_4^k \\ \log_e a_4^r a_5^k & \log_e a_5^r a_6^k & \log_e a_6^r a_7^k \\ \log_e a_7^r a_8^k & \log_e a_8^r a_9^k & \log_e a_9^r a_{10}^k \end{vmatrix} = 0$$ है। तब S में अवयवों की संख्या होगी :

(1) अनन्त (2) 4

(3) 10 (4) 2

6. $\theta \in (0,\pi)$ के मानों की संख्या, जिसके लिये रेखीय समीकरण निकाय

$x + 3y + 7z = 0$

$-x + 4y + 7z = 0$

$(\sin 3\theta)x + (\cos 2\theta)y + 2z = 0$

के अनिरर्थक हल हो, होगी

(1) एक (2) तीन (3) चार (4) दो

7. यदि रैखिक समीकरण निकाय

$2x + 2y + 3z = a$

$3x - y + 5z = b$

$x - 3y + 2z = c$

जहाँ a, b, c शून्येतर वास्तविक संख्यायें है, के एक से अधिक हल हैं, तो

(1) $b - c - a = 0$ (2) $a + b + c = 0$

(3) $b + c - a = 0$ (4) $b - c + a = 0$

8. यदि $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)$

$(x + a + b + c)^2$, $x \neq 0$ तथा $a + b + c \neq 0$ हो, तो x बराबर है :-

(1) $-(a + b + c)$ (2) $2(a + b + c)$

(3) abc (4) $-2(a + b + c)$

9. एक ऐसा क्रमित युग्म (α,β) जिसके लिये रैखिक समीकरण निकाय

$(1+\alpha)x + \beta y+z = 2$

$\alpha x+(1+\beta)y+z = 3$

$\alpha x+\beta y+2z = 2$ का एकमात्र एक हल है, है :

(1) $(1,-3)$ (2) $(-3,1)$ (3) $(2, 4)$ (4) $(-4, 2)$

10. λ के सभी मानों का समुच्चय, जिसके लिये समीकरण निकाय

$x - 2y - 2z = \lambda x$

$x + 2y + z = \lambda y$

$-x - y = \lambda z$

के अनिरर्थक हल हो, होगा

(1) दो से अधिक अवयव विद्यमान होंगे।

(2) एकल समुच्चय होगा।

(3) रिक्त समुच्चय होगा।

(4) ठीक दो अवयव विद्यमान होगें

11. $c \in R$ का अधिकतम मान, जिसके लिए रैखिक समीकरण निकाय

$x - cy - cz = 0$

$cx - y + cz = 0$

$cx + cy - z = 0$

का एक अतुच्छ हल है, है –

(1) $\frac{1}{2}$ (2) –1 (3) 0 (4) 2

12. यदि रैखिक समीकरण निकाय

$x - 2y + kz = 1$

$2x + y + z = 2$

$3x - y - kz = 3$

का एक हल (x,y,z), $z \neq 0$, है, तो (x,y) जिस रेखा पर स्थित है, उसका समीकरण है:–

(1) $3x - 4y - 1 = 0$ (2) $3x - 4y - 4 = 0$

(3) $4x - 3y - 4 = 0$ (4) $4x - 3y - 1 = 0$

13. यदि समीकरण निकाय $2x + 3y - z = 0$, $x + ky - 2z = 0$ तथा $2x - y + z = 0$ का एक अतुच्छ (non-trival) हल (x, y, z) है, तो $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+k$ बराबर है :-

(1) $\frac{3}{4}$ (2) –4 (3) $\frac{1}{2}$ (4) $-\frac{1}{4}$

14. यदि $\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$ तथा

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta & -x & 1 \\ \cos 2\theta & 1 & x \end{vmatrix}$, $x \neq 0$; तो सभी

$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिए :

(1) $\Delta_1 - \Delta_2 = x(\cos 2\theta - \cos 4\theta)$

(2) $\Delta_1 + \Delta_2 = -2x^3$

(3) $\Delta_1 - \Delta_2 = -2x^3$

(4) $\Delta_1 + \Delta_2 = -2(x^3 + x - 1)$

15. माना λ एक ऐसी वास्तविक संख्या है जिसके लिए रैखिक समीकरण निकाय

$x + y + z = 6$

$4x + \lambda y - \lambda z = \lambda - 2$

$3x + 2y - 4z = -5$

के अनन्त हल हैं। तो λ जिस द्विघात समीकरण का एक मूल है, वह है :

(1) $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ (2) $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$

(3) $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ (4) $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

16. समीकरण $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$, के वास्तविक मूलों का योगफल है:

(1) 6 (2) 1 (3) 0 (4) – 4

17. $\theta \in (0, \pi/3)$ का एक मान, जिसके लिये

$\begin{vmatrix} 1+\cos^2\theta & \sin^2\theta & 4\cos 6\theta \\ \cos^2\theta & 1+\sin^2\theta & 4\cos 6\theta \\ \cos^2\theta & \sin^2\theta & 1+4\cos 6\theta \end{vmatrix} = 0$ है, है :

(1) $\frac{7\pi}{24}$ (2) $\frac{\pi}{18}$ (3) $\frac{\pi}{9}$ (4) $\frac{7\pi}{36}$

18. यदि [x] महत्तम पूर्णांक $\le$ x है, तो रैखिक समीकरण निकाय $[\sin\theta]\,x + [-\cos\theta]y=0$

$[\cot\theta]x + y = 0$

(1) के मात्र एक हल है यदि $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{7\pi}{6}\right)$

(2) के अनन्त हल है यदि $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ तथा मात्र एक हल है यदि $\theta \in \left(\pi, \frac{7\pi}{6}\right)$

(3) का मात्र एक हल है यदि $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ तथा अनन्त हल है यदि $\theta \in \left(\pi, \frac{7\pi}{6}\right)$

(4) के मात्र एक हल है यदि $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\pi, \frac{7\pi}{6}\right)$

SOLUTION

1. Ans. (2)

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 2 & 3 & a^2-1\end{vmatrix}=a^2-3$$

$$D_1=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 2\\ a+1 & 3 & a^2-1\end{vmatrix}=a^2-a+1$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 2\\ 2 & a+1 & a^2-1\end{vmatrix}=a^2-3$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 5\\ 2 & 3 & a+1\end{vmatrix}=a-4$$

$D = 0$ at $|a| = \sqrt{3}$ but $D_3 = \pm\sqrt{3}-4\neq 0$

So the system is Inconsistant for $|a|=\sqrt{3}$

2. Ans. (2)

$P_1 \equiv x - 4y + 7z - g = 0$

$P_2 \equiv 3x - 5y - h = 0$

$P_3 \equiv -2x + 5y - 9z - k = 0$

Here $\Delta = 0$

$2P_1 + P_2 + P_3 = 0$ when $2g + h + k = 0$

3. Ans. (4)

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & \alpha\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & \alpha-1\end{vmatrix}=(\alpha-1)-4=(\alpha-5)$$

for infinite solutions $D = 0 \Rightarrow \alpha = 5$

$$D_x=0\Rightarrow\begin{vmatrix}5 & 1 & 1\\ 9 & 2 & 3\\ \beta & 3 & 5\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 3\\ \beta-15 & -2 & 5\end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow 2+\beta-15=0\Rightarrow\beta-13=0$

on $\beta = 13$ we get $D_y = D_z = 0$

$\alpha = 5$, $\beta = 13$

4. Ans. (3)

$$\det A=\begin{vmatrix}-2 & 4+d & \sin\theta-2\\ 1 & \sin\theta+2 & d\\ 5 & 2\sin\theta-d & -\sin\theta+2+2d\end{vmatrix}$$

$(R_1 \to R_1 + R_3 - 2R_2)$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \sin\theta+2 & d\\ 5 & 2\sin\theta-d & 2+2d-\sin\theta\end{vmatrix}$$

$=(2+\sin\theta)(2+2d-\sin\theta)-d(2\sin\theta-d)$

$=4 + 4d - 2\sin\theta + 2\sin\theta+2d\sin\theta - \sin^2\theta$
$-2d\sin\theta+d^2$

$=d^2 + 4d + 4 - \sin^2\theta$

$=(d + 2)^2 - \sin^2\theta$

For a given d, minimum value of

$\det(A) = (d + 2)^2 - 1 = 8$

$\Rightarrow d = 1$ or -5

5. Ans. (1)

Apply

$C_3 \to C_3 - C_2$

$C_2 \to C_2 - C_1$

We get $D = 0$

Option (1)

6. Ans. (4)

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 7\\ -1 & 4 & 7\\ \sin 3\theta & \cos 2\theta & 2\end{vmatrix}=0$$

$(8 - 7\cos 2\theta) - 3(-2 - 7\sin 3\theta)$
$+ 7(-\cos 2\theta - 4\sin 3\theta) = 0$

$14 - 7\cos 2\theta + 21\sin 3\theta - 7\cos 2\theta$
$- 28\sin 3\theta = 0$

$14 - 7\sin 3\theta - 14\cos 2\theta = 0$

$14 - 7(3\sin\theta - 4\sin^3\theta) - 14(1 - 2\sin^2\theta) = 0$

$-21\sin\theta + 28\sin^3\theta + 28\sin^2\theta = 0$

$7\sin\theta\,[-3 + 4\sin^2\theta + 4\sin\theta] = 0$

$\sin\theta,\ 4\sin^2\theta + 6\sin\theta - 2\sin\theta - 3 = 0$

$2\sin\theta(2\sin\theta + 3) - 1(2\sin\theta + 3) = 0$

$\sin\theta = \frac{-3}{2}$; $\sin\theta = \frac{1}{2}$

Hence, 2 solutions in $(0, \pi)$

Option (4)

7. Ans. (1)

$P_1 : 2x + 2y + 3z = a$

$P_2 : 3x - y + 5z = b$

$P_3 : x - 3y + 2z = c$

We find

$P_1 + P_3 = P_2 \Rightarrow a + c = b$

8. Ans. (4)

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$= (a + b + c)(a + b + c)^2$

$\Rightarrow x = -2(a + b + c)$

9. Ans. (3)

For unique solution

$$\Delta \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1+\alpha & \beta & 1 \\ \alpha & 1+\beta & 1 \\ \alpha & \beta & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \alpha & \beta & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha + \beta \neq -2$$

10. Ans. (2)

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

11. Official Ans. by NTA (1)

Sol. For non-trivial solution

D = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & -c & -c \\ c & -1 & c \\ c & c & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2c^3 - 3c^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow \quad (c + 1)^2 (2c - 1) = 0$

$\therefore \quad$ Greatest value of c is $\frac{1}{2}$

12. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $x - 2y + kz = 1 \quad$ ...(1)

$2x + y + z = 2 \quad$ ...(2)

$3x - y - kz = 3 \quad$ ...(3)

(1) +(3)

$\Rightarrow 4x - 3y = 4$

13. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & K & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

By solving $K = \frac{9}{2}$

$2x + 3y - z = 0 \quad$ …(1)

$x + \frac{9}{2}y - 2z = 0 \quad$ …(2)

$2x - y + z = 0 \quad$ …(3)

(1)-(3) $\Rightarrow 4y - 2z = 0$

$2y = z \quad$ …(4)

$\boxed{\frac{y}{z} = \frac{1}{2}} \quad$ …(5)

put z from eqn. (4) into (1)

$2x + 3y - 2y = 0$

$2x + y = 0$

$\boxed{\frac{x}{y} = -\frac{1}{2}} \quad$ …(6)

$\frac{(6)}{(5)} \boxed{\frac{z}{x} = -4}$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + K = \frac{1}{2}$

14. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $$\Delta_1 = f(\theta) = \begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix} = -x^3$$

and $$\Delta_2 = f(2\theta) = \begin{vmatrix} x & \sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -\sin 2\theta & -x & 1 \\ \cos 2\theta & 1 & x \end{vmatrix} = -x^3$$

So $\Delta_1 + \Delta_2 = -2x^3$

15. Official Ans. by NTA (2)

Sol. D = 0

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & \lambda & -\lambda \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

16. Official Ans. by NTA (3)

Sol. By expansion, we get

$-5x^3 + 30x - 30 + 5x = 0$

$\Rightarrow -5x^3 + 35x - 30 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 7x + 6 = 0$, All roots are real

So, sum of roots = 0

17. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $R_1 \to R_1 - R_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \cos^2\theta & 1+\sin^2\theta & 4\cos 6\theta \\ \cos^2\theta & \sin^2\theta & 1+4\cos 6\theta \end{vmatrix} = 0$$

$R_2 \to R_2 - R_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \cos^2\theta & \sin^2\theta & 1+4\cos 6\theta \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (1 + 4\cos 6\theta) + \sin^2\theta + 1(\cos^2\theta) = 0$

$1 + 2\cos 6\theta = 0 \Rightarrow \cos 6\theta = -1/2$

$$6\theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{9}}$$

18. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $[\sin\theta]x + [-\cos\theta]y = 0$ and $[\cos\theta]x + y = 0$

for infinite many solution

$$\begin{vmatrix} [\sin\theta] & [-\cos\theta] \\ [\cos\theta] & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ie $[\sin\theta] = -[\cos\theta][\cot\theta]$ (1)

when $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \sin\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$-\cos\theta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\cot\theta \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

when $\theta \in \left(\pi, \frac{7\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin\theta \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$$-\cos\theta \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

$$\cot\theta \in \left(\sqrt{3}, \infty\right)$$

when $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ then equation (i) satisfied there fore infinite many solution.

when $\theta \in \left(\pi, \frac{7\pi}{6}\right)$ then equation (i) not satisfied there fore infinite unique solution.