

CONTINUITY

1. माना $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ एक फलन है जो :

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{if } x \leq 1 \\ a + bx, & \text{if } 1 < x < 3 \\ b + 5x, & \text{if } 3 \leq x < 5 \\ 30, & \text{if } x \geq 5 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है, तो f होगा :

- (1) सतत् यदि $a = 5$ तथा $b = 5$ है।
- (2) सतत् यदि $a = -5$ तथा $b = 10$ है।
- (3) सतत् यदि $a = 0$ तथा $b = 5$ है।
- (4) a तथा b के किसी भी मान के लिये सतत् नहीं है।

2. माना $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ इस प्रकार परिभाषित है कि

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [x] & , -1 \leq x < 1 \\ x + |x| & , 1 \leq x < 2 \\ x + [x] & , 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

जहाँ $[t]$, t या उससे कम अधिकतम पूर्णांक को दर्शाता है। तो f असंतत है :-

- (1) केवल दो बिंदुओं पर
- (2) चार अथवा उससे अधिक बिंदुओं पर
- (3) केवल एक बिंदु पर
- (4) केवल तीन बिंदुओं पर

3. यदि फलन $f, \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ पर इस प्रकार परिभाषित है कि

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\cot x - 1}, & x \neq \frac{\pi}{4} \\ k, & x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

संतत है, तो k बराबर

है:

- (1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) 2

4. यदि फलन $f(x) = \begin{cases} a|\pi - x| + 1, & x \leq 5 \\ b|x - \pi| + 3, & x > 5 \end{cases}$ $x = 5$ पर संतत है, तो $a - b$ का मान है :-

- (1) $\frac{2}{5 - \pi}$ (2) $\frac{2}{\pi - 5}$
- (3) $\frac{2}{\pi + 5}$ (4) $\frac{-2}{\pi + 5}$

5. यदि $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(p+1)x + \sin x}{x}, & x < 0 \\ q, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{x^{3/2}}, & x > 0 \end{cases}$

$x = 0$, पर संतत है, तो क्रमित युग्म (p, q) बराबर है :

- (1) $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (2) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
- (3) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (4) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

SOLUTION

1. Ans. (4)

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{if } x \leq 1 \\ a + bx & \text{if } 1 < x < 3 \\ b + 5x & \text{if } 3 \leq x < 5 \\ 30 & \text{if } x \geq 5 \end{cases}$$

$$f(1) = 5, f(1^-) = 5, f(1^+) = a + b$$

$$f(3^-) = a + 3b, f(3) = b + 15, f(3^+) = b + 15$$

$$f(5^-) = b + 25; f(5) = 30 \quad f(5^+) = 30$$

from above we concluded that f is not continuous for any values of a and b .

2. Official Ans. by NTA (4)

$$\text{Sol. } f(x) = \begin{cases} -(x+1) & , -1 \leq x < 0 \\ x & , 0 \leq x < 1 \\ 2x & , 1 \leq x < 2 \\ x+2 & , 2 \leq x < 3 \\ x+3 & , x = 3 \end{cases}$$

function discontinuous at $x = 0, 1, 3$

3. Official Ans. by NTA (1)

Sol. \therefore function should be continuous at $x = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\cot x - 1} = k$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sqrt{2}\sin x}{-\operatorname{cosec}^2 x} = k \quad (\text{Using L'Hôpital rule})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\sin^3 x = k$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

4. Official Ans. by NTA (1)

$$\text{Sol. } f(x) = \begin{cases} a|\pi - x| + 1; x \geq 5 \\ b|\pi - x| + 3; x < 5 \end{cases}$$

$$a|\pi - 5| + 1 = b|5 - \pi| + 3$$

$$a(5 - \pi) + 1 = b(5 - \pi) + 3$$

$$(a - b)(5 - \pi) = 2$$

$$a - b = \frac{2}{5 - \pi}$$

5. Official Ans. by NTA (4)

$$\text{Sol. RHL} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+x^2} - \sqrt{x}}{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\text{LHL} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(p+1)x + \sin x}{x} = (p+1) + 1 = p+2$$

for continuity LHL = RHL = $f(0)$

$$\Rightarrow (p, q) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$