

CIRCLE

1. a, b, c ($a < b < c$) त्रिज्याओं के तीन वृत्त एक-दूसरे बाह्य स्पर्श करते हैं। यदि उन तीनों वृत्तों की उभयनिष्ठ जीवा x अक्ष हो, तो :
- (1) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$
 (2) a, b, c समान्तर श्रेणी में होंगे
 (3) $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ समान्तर श्रेणी में होंगे
 (4) $\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$
2. यदि वृत्त $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 164 = r^2$ तथा $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 36$ दो भिन्न बिन्दुओं पर काटते हैं, तो :
- (1) $0 < r < 1$ (2) $1 < r < 11$
 (3) $r > 11$ (4) $r = 11$
3. एक वृत्त C , बिन्दु $(4,0)$ से होकर जाता है तथा वृत्त $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$ को बिन्दु $(1, -1)$ पर बाह्य स्पर्श करता है, तो C की त्रिज्या है :
- (1) $\sqrt{57}$ (2) 4 (3) $2\sqrt{5}$ (4) 5
4. यदि वृत्त $x^2 + y^2 + 10x + 12y + c = 0$ के अन्तर्गत समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $27\sqrt{3}$ वर्ग इकाई हो, तो c होगा :
- (1) 20 (2) 25
 (3) 13 (4) -25
5. निर्देशांक अक्षों के समान्तर भुजाओं का एक वर्ग, वृत्त $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 103 = 0$ के अंतर्गत है, तो इस वर्ग का वह शीर्ष जो मूल बिन्दु के सबसे निकट है, की दूरी है :-
- (1) 13 (2) $\sqrt{137}$ (3) 6 (4) $\sqrt{41}$
6. सरल रेखा $x + 2y = 1$ निर्देशांक अक्षों को A तथा B पर काटती है। मूल बिन्दु, A तथा B से होकर जाने वाला वृत्त खींचा गया है, तो मूल बिन्दु पर वृत्त की स्पर्श रेखा की A तथा B से लम्बवत् दूरियों का योग है :
- (1) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (3) $2\sqrt{5}$ (4) $4\sqrt{5}$
7. बराबर त्रिज्या के दो वृत्त, बिन्दुओं $(0, 1)$ तथा $(0, -1)$ पर काटते हैं। इनमें से एक वृत्त के बिन्दु $(0, 1)$ पर स्पर्श रेखा दूसरे वृत्त के केन्द्र से होकर जाती है, तो इन वृत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी है :
- (1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $2\sqrt{2}$ (4) 2
8. एक वृत्त x -अक्ष पर एक जीवा काटता है जिसकी लंबाई $4a$ है तथा यह वृत्त y -अक्ष के एक बिन्दु से हो कर जाता है जिसकी मूलबिन्दु से दूरी $2b$ है। तो वृत्त के केन्द्र का बिन्दुपथ (locus) है :-
- (1) एक अतिपरवलय (2) एक परवलय
 (3) एक सरल रेखा (4) एक दीर्घवृत्त
9. यदि एक चर रेखा $3x+4y-\lambda=0$ इस प्रकार है कि दो वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ तथा $x^2+y^2-18x-2y+78=0$ इसके दोनों ओर (opposite sides) हैं, तो λ के सभी मानों का समुच्चय निम्न में से कौनसा अन्तराल है :-
- (1) $[12, 21]$ (2) $(2, 17)$
 (3) $(23, 31)$ (4) $[13, 23]$
10. माना C_1 तथा C_2 क्रमशः वृत्तों $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ तथा $x^2+y^2-6x-6y+14=0$ के केन्द्र हैं। यदि P तथा Q इन वृत्तों के प्रतिच्छेदन बिन्दु हैं, तो चतुर्भुज PC_1QC_2 का क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में) है :
- (1) 8 (2) 6 (3) 9 (4) 4
11. माना $O(0, 0)$ तथा $A(0, 1)$ दो निश्चित बिन्दु हैं, तो ऐसे बिन्दु P जिनके लिए ΔAOP का परिमाप 4 हो, का बिन्दुपथ है-
- (1) $8x^2 - 9y^2 + 9y = 18$
 (2) $9x^2 + 8y^2 - 8y = 16$
 (3) $8x^2 + 9y^2 - 9y = 18$
 (4) $9x^2 - 8y^2 + 8y = 16$
12. वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ पर रेखाओं $x + y = n$, $n \in \mathbb{N}$ जहाँ \mathbb{N} सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, द्वारा काटी गई जीवाओं की लंबाईयों के वर्गों का योग है -
- (1) 320 (2) 160
 (3) 105 (4) 210
13. वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ के बिन्दु $(\sqrt{3}, 1)$ पर खींची गई स्पर्श रेखा और अभिलंब तथा x -अक्ष एक त्रिभुज बनाते हैं। इस त्रिभुज का (वर्ग इकाईयों में) क्षेत्रफल है :-
- (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (4) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

14. यदि वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ की एक स्पर्शरेखा निर्देशांक अक्षों को भिन्न बिंदुओं P तथा Q पर प्रतिच्छेद करती है, तो PQ के मध्यबिंदु का बिंदुपथ है:
- (1) $x^2 + y^2 - 2xy = 0$
 (2) $x^2 + y^2 - 16x^2y^2 = 0$
 (3) $x^2 + y^2 - 4x^2y^2 = 0$
 (4) $x^2 + y^2 - 2x^2y^2 = 0$
15. वृत्तों $x^2 + y^2 = 4$ तथा $x^2 + y^2 + 6x + 8y - 24 = 0$ की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा निम्न में से किस बिन्दु से होकर जाती है ?
- (1) $(-4, 6)$ (2) $(6, -2)$
 (3) $(-6, 4)$ (4) $(4, -2)$
16. यदि वृत्तों $x^2 + y^2 + 5Kx + 2y + K = 0$ तथा $2(x^2 + y^2) + 2Kx + 3y - 1 = 0$, ($K \in \mathbb{R}$), के प्रतिच्छेदन बिन्दु P तथा Q है, तो रेखा $4x + 5y - K = 0$ के बिन्दुओं P तथा Q से होकर जाने के लिए :
- (1) K के अनन्त मान है।
 (2) K का मात्र एक मान है।
 (3) K का कोई भी मान नहीं है।
 (4) K के मात्र दौ मान है।
17. रेखा $x = y$ एक वृत्त को बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्श करती है। यदि यह वृत्त बिन्दु $(1, -3)$ से भी होकर जाता है, तो इसकी त्रिज्या है :
- (1) $3\sqrt{2}$ (2) 3 (3) $2\sqrt{2}$ (4) 2
18. ऐसे वृत्तों, जो वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ को बाह्य स्पर्श करते हैं, y-अक्ष को भी स्पर्श करते हैं तथा प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, के केंद्रों का बिन्दुपथ है :
- (1) $y = \sqrt{1+4x}$, $x \geq 0$
 (2) $x = \sqrt{1+4y}$, $y \geq 0$
 (3) $x = \sqrt{1+2y}$, $y \geq 0$
 (4) $y = \sqrt{1+2x}$, $x \geq 0$
19. यदि एक बिन्दु, जहाँ 5 cm तथा 12 cm त्रिज्या के दो वृत्त एक दूसरे को काटते हैं, पर प्रतिच्छेदन कोण 90° है, तो उनकी उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई (cm में) है :
- (1) $\frac{60}{13}$ (2) $\frac{120}{13}$ (3) $\frac{13}{2}$ (4) $\frac{13}{5}$
20. x-अक्ष को $(3, 0)$ पर स्पर्श करता हुआ तथा y-अक्ष पर 8 लम्बाई का अंतःखण्ड (intercept) बनाता हुआ एक वृत्त निम्न में से किस बिन्दु से होकर जाता है ?
- (1) $(3, 10)$ (2) $(2, 3)$ (3) $(1, 5)$ (4) $(3, 5)$

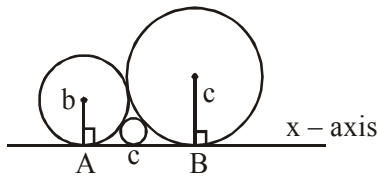
SOLUTION

1. **Ans. (1)**

$$AB = AC + CB$$

$$\sqrt{(b+c)^2 - (b-c)^2}$$

$$= \sqrt{(b+a)^2 - (b-a)^2} + \sqrt{(a+c)^2 - (a-c)^2}$$



$$\sqrt{bc} = \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

2. **Ans. (2)**

$$x^2 + y^2 - 16x - 20y + 164 = r^2$$

$$A(8,10), R_1 = r$$

$$(x-4)^2 + (y-7)^2 = 36$$

$$B(4,7), R_2 = 6$$

$$|R_1 - R_2| < AB < R_1 + R_2$$

$$\Rightarrow 1 < r < 11$$

3. **Ans. (4)**

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$$

Equation of tangent at $(1, -1)$

$$x - y + 2(x+1) - 3(y-1) - 12 = 0$$

$$3x - 4y - 7 = 0$$

\therefore Equation of circle is

$$(x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12) + \lambda(3x - 4y - 7) = 0$$

It passes through $(4, 0)$:

$$(16 + 16 - 12) + \lambda(12 - 7) = 0$$

$$\Rightarrow 20 + \lambda(5) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -4$$

$$\therefore (x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12) - 4(3x - 4y - 7) = 0$$

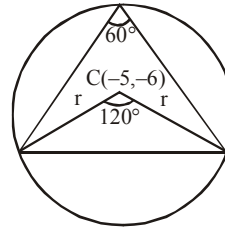
$$\text{or } x^2 + y^2 - 8x + 10y + 16 = 0$$

$$\text{Radius} = \sqrt{16 + 25 - 16} = 5$$

4. **Ans. (2)**

$$3\left(\frac{1}{2}r^2 \cdot \sin 120^\circ\right) = 27\sqrt{3}$$

$$\frac{r^2 \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{27\sqrt{3}}{3}$$



$$r^2 = \frac{108}{3} = 36$$

$$\text{Radius} = \sqrt{25 + 36 - C} = \sqrt{36}$$

$$C = 25$$

\therefore Option (2)

5. **Ans. (4)**

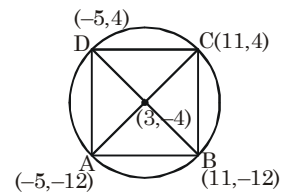
$$R = \sqrt{9 + 16 + 103} = 8\sqrt{2}$$

$$OA = 13$$

$$OB = \sqrt{265}$$

$$OC = \sqrt{137}$$

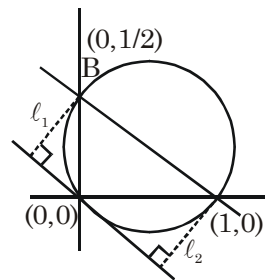
$$OD = \sqrt{41}$$



6. **Ans. (2)**

Equation of circle

$$(x-1)(x-0) + (y-0)\left(y-\frac{1}{2}\right) = 0$$



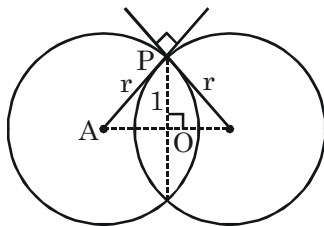
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} = 0$$

Equation of tangent of origin is $2x + y = 0$

$$l_1 + l_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4+1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

7. **Ans. (4)**
In $\triangle APO$



$$\left(\frac{\sqrt{2}r}{2}\right)^2 + 1^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \boxed{r = \sqrt{2}}$$

So distance between centres = $\sqrt{2}r = 2$

8. **Ans. (2)**
Let equation of circle is
 $x^2 + y^2 + 2fx + 2fy + e = 0$, it passes through
 $(0, 2b)$
 $\Rightarrow 0 + 4b^2 + 2g \times 0 + 4f + c = 0$
 $\Rightarrow 4b^2 + 4f + c = 0 \quad \dots(i)$

$$2\sqrt{g^2 - c} = 4a \quad \dots(ii)$$

$$g^2 - c = 4a^2 \Rightarrow c = (g^2 - 4a^2)$$

Putting in equation (1)

$$\Rightarrow 4b^2 + 4f + g^2 - 4a^2 = 0$$

$\Rightarrow x^2 + 4y + 4(b^2 - a^2) = 0$, it represent a parabola.

9. **Ans. (1)**
Centre of circles are opposite side of line
 $(3 + 4 - \lambda)(27 + 4 - \lambda) < 0$
 $(\lambda - 7)(\lambda - 31) < 0$
 $\lambda \in (7, 31)$

distance from S_1

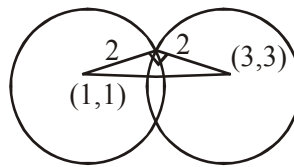
$$\left|\frac{3+4-\lambda}{5}\right| \geq 1 \Rightarrow \lambda \in (-\infty, 2] \cup [12, \infty)$$

distance from S_2

$$\left|\frac{27+4-\lambda}{5}\right| \geq 2 \Rightarrow \lambda \in (-\infty, 21] \cup [41, \infty)$$

so $\lambda \in [12, 21]$

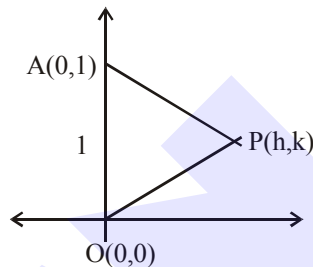
10. **Ans. (4)**



$$\text{Area} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

11. **Official Ans. by NTA (2)**

Sol.



$$AP + OP + AO = 4$$

$$\sqrt{h^2 + (k-1)^2} + \sqrt{h^2 + k^2} + 1 = 4$$

$$\sqrt{h^2 + (k-1)^2} + \sqrt{h^2 + k^2} = 3$$

$$h^2 + (k-1)^2 = 9 + h^2 + k^2 - 6\sqrt{h^2 + k^2}$$

$$-2k - 8 = -6\sqrt{h^2 + k^2}$$

$$k + 4 = 3\sqrt{h^2 + k^2}$$

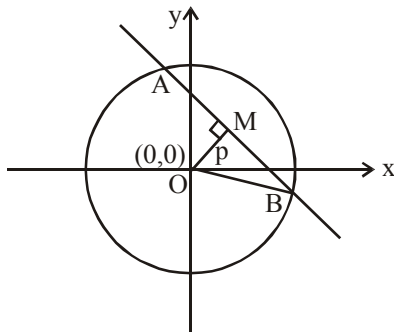
$$k^2 + 16 + 8k = 9(h^2 + k^2)$$

$$9h^2 + 8k^2 - 8k - 16 = 0$$

Locus of P is $9x^2 + 8y^2 - 8y - 16 = 0$

12. Official Ans. by NTA (4)

Sol.



$$p = \frac{n}{\sqrt{2}}, \text{ but } \frac{n}{\sqrt{2}} < 4 \Rightarrow n = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\text{Length of chord AB} = 2\sqrt{16 - \frac{n^2}{2}}$$

$$= \sqrt{64 - 2n^2} = l(\text{say})$$

For $n = 1, l^2 = 62$

$n = 2, l^2 = 56$

$n = 3, l^2 = 46$

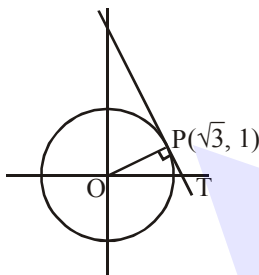
$n = 4, l^2 = 32$

$n = 5, l^2 = 14$

$$\therefore \text{Required sum} = 62 + 56 + 46 + 32 + 14 = 210$$

13. Official Ans. by NTA (4)

Sol.



Given $x^2 + y^2 = 4$
equation of tangent

$$\Rightarrow \sqrt{3}x + y = 4 \quad \dots(1)$$

Equation of normal

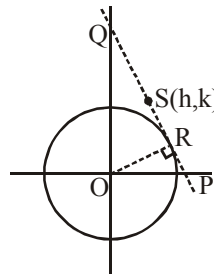
$$x - \sqrt{3}y = 0 \quad \dots(2)$$

Coordinate of T $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, 0\right)$

$$\therefore \text{Area of triangle} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

14. Official Ans. by NTA (3)

Sol.



Let the mid point be S(h,k)

$$\therefore P(2h,0) \text{ and } Q(0,2k)$$

$$\text{equation of PQ} : \frac{x}{2h} + \frac{y}{2k} = 1$$

\therefore PQ is tangent to circle at R(say)

$$\therefore OR = 1 \Rightarrow \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2h}\right)^2 + \left(\frac{1}{2k}\right)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4h^2} + \frac{1}{4k^2} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x^2y^2 = 0$$

Aliter :

tangent to circle

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1$$

P : (sec θ , 0)

Q : (0, cosec θ)

$$2h = \sec\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2h} \ \& \ \sin\theta = \frac{1}{2k}$$

$$\frac{1}{(2x)^2} + \frac{1}{(2y)^2} = 1$$

15. Official Ans. by NTA (2)

Sol. Circle touches internally

$C_1(0, 0); r_1 = 2$

$C_2 : (-3, -4); r_2 = 7$

$$C_1C_2 = |r_1 - r_2|$$

$$S_1 - S_2 = 0 \Rightarrow \text{eqn. of common tangent}$$

$$6x + 8y - 20 = 0$$

$$3x + 4y = 10$$

(6, -2) satisfy it

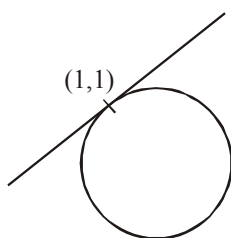
16. Official Ans. by NTA (3)**Sol.** Equation of common chord

$$4kx + \frac{1}{2}y + k + \frac{1}{2} = 0 \dots(1)$$

$$\text{and given line is } 4x + 5y - k = 0 \dots(2)$$

On comparing (1) & (2), we get

$$k = \frac{1}{10} = \frac{k + \frac{1}{2}}{-k}$$

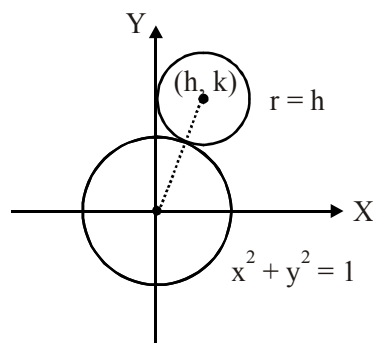
 \Rightarrow No real value of k exist**17. Official Ans. by NTA (1)****ALLEN Ans. (3)****Sol.**Equation of circle can be written as $(x-1)^2 + (y-1)^2 + \lambda(x-y) = 0$ It passes through $(1, -3)$

$$16 + \lambda(4) = 0 \Rightarrow \lambda = -4$$

$$\text{So } (x-1)^2 + (y-1)^2 - 4(x-y) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 2y + 2 = 0$$

$$\Rightarrow r = 2\sqrt{2}$$

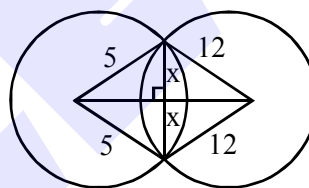
(correct key is 3)**18. Official Ans. by NTA (4)****Sol.**

$$\sqrt{h^2 + k^2} = |h| + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + 1 + 2x$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 + 2x$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{1+2x} ; x \geq 0.$$

19. Official Ans. by NTA (2)**Sol.**Let length of common chord = $2x$

$$\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{144 - x^2} = 13$$

after solving

$$x = \frac{12 \times 5}{13}$$

$$2x = \frac{120}{13}$$

20. Official Ans. by NTA (1)**Sol.** Equation of circles are

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ (x-3)^2 + (y+5)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0 \end{cases}$$

