AREA UNDER THE CURVE

1. परवलय $y = x^2 - 1$ के बिन्दु (2, 3) पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा y अक्ष द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल (वर्ग इकाई में) होगा:

(1) $\frac{14}{3}$ (2) $\frac{56}{3}$ (3) $\frac{8}{3}$ (4) $\frac{32}{3}$

2. क्षेत्र $A = \left[(x,y): 0 \le y \le x|x| + 1 \text{ and } -1 \le x \le 1\right]$ का वर्ग इकाई में क्षेत्रफल है :

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) 2 (4) $\frac{4}{3}$

3. यदि वक्रों $y=kx^2$ तथा $x=ky^2$, $(k>0)$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई हैं, तो k बराबर है :

(1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $\sqrt{3}$

4. बिन्दु (1,e) से गुजरने वाले वक्र $y = xe^{x^2}$ की स्पर्श रेखा किस बिन्दु से गुजरेगी :

(1) $\left(\frac{4}{3}, 2e\right)$ (2) (2,3e) (3) $\left(\frac{5}{3}, 2e\right)$ (4) (3,6e)

5. वक्र $x^2 = 4y$ तथा सरल रेखा $x = 4y - 2$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) है:-

(1) $\frac{5}{4}$ (2) $\frac{9}{8}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{7}{8}$

6. परवलय $y = x^2 + 2$ तथा रेखाओं $y = x + 1$, $x = 0$ और $x = 3$ द्वारा घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग इकाईयों में) है :

(1) $\frac{15}{4}$ (2) $\frac{15}{2}$ (3) $\frac{21}{2}$ (4) $\frac{17}{4}$

7. क्षेत्र $A = \{(x, y) \in R \times R | 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 4, y \le x^2 + 3x\}$ का क्षेत्रफल (वर्ग इकाईयों में) है –

(1) $\frac{53}{6}$ (2) $\frac{59}{6}$

(3) 8 (4) $\frac{26}{3}$

8. माना $S(\alpha) = \{(x,y) : y^2 \le x, 0 \le x \le \alpha\}$ तथा $A(\alpha)$ क्षेत्र $S(\alpha)$ का क्षेत्रफल है। यदि किसी λ, $0 < \lambda < 4$ के लिए $A(\lambda) : A(4) = 2 : 5$ है, तो λ बराबर है:-

(1) $2\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$ (2) $4\left(\frac{4}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$

(3) $2\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ (4) $4\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

9. क्षेत्र $A = \{(x, y) : x^2 \le y \le x + 2\}$ का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) है :

(1) $\frac{10}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{31}{6}$ (4) $\frac{13}{6}$

10. क्षेत्र $A = \{(x, y): \frac{y^2}{2} \le x \le y + 4\}$ का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) है :-

(1) $\frac{53}{3}$ (2) 18 (3) 30 (4) 16

11. वक्रों $y = 2^x$ तथा $y = |x + 1|$ द्वारा प्रथम चतुर्थांश में परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग इकाईयों में) है :

(1) $\frac{3}{2} - \frac{1}{\log_e 2}$ (2) $\frac{1}{2}$

(3) $\log_e 2 + \frac{3}{2}$ (4) $\frac{3}{2}$

12. यदि क्षेत्र $\{(x, y) : y^2 \le 4x, x + y \le 1, x \ge 0, y \ge O\}$ का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) $a\sqrt{2} + b$ है, तो $a - b$ बराबर है :

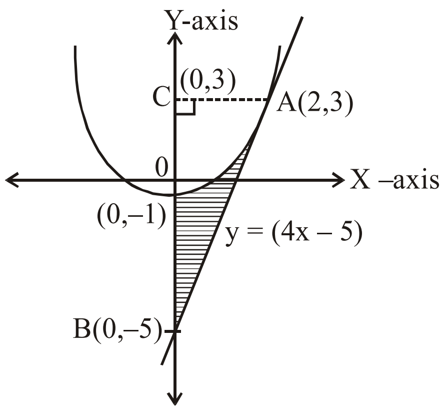
(1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{10}{3}$ (3) 6 (4) $-\frac{2}{3}$

13. यदि परलवय $y^2 = 4\lambda x$ तथा रेखा $y = \lambda x$, $\lambda > 0$, से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग इकाईयों में) $\frac{1}{9}$ है, तो λ बराबर है:

(1) 24 (2) 48 (3) $4\sqrt{3}$ (4) $2\sqrt{6}$

SOLUTION

1. Ans. (3)



Equation of tangent at (2,3) on

$y = x^2 - 1$, is $y = (4x - 5)$ ....(i)

$\therefore$ Required shaded area

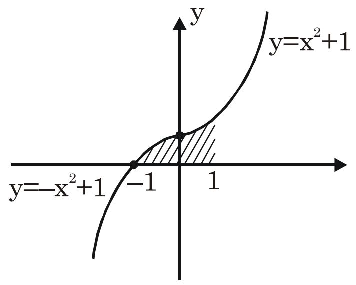
$$= \text{ar}(\Delta ABC) - \int_{-1}^{3} \sqrt{y+1}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}.(8).(2) - \frac{2}{3}\left((y+1)^{3/2}\right)_{-1}^{3}$$

$$= 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} \text{ (square units)}$$

2. Ans. (3)

The graph is a follows



$$\int_{-1}^{0}\left(-x^2+1\right)dx + \int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)dx = 2$$

3. Ans. (1)

Area bounded by $y^2 = 4ax$ & $x^2 = 4by$,

a, b $\neq 0$ is $\left|\frac{16ab}{3}\right|$

by using formula : $4a = \frac{1}{k} = 4b, k > 0$

$$\text{Area} = \left|\frac{16.\frac{1}{4k}.\frac{1}{4k}}{3}\right| = 1$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

4. Ans. (1)

$$y = x e^{x^2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,e)} = \left.\left(e \cdot e^{x^2} \cdot 2x + e^{x^2}\right)\right|_{(1,e)} = 2 \cdot e + e = 3e$$

T : $y - e = 3e\,(x - 1)$

$$y = 3ex - 3e + e$$
$$y = (3e)x - 2e$$

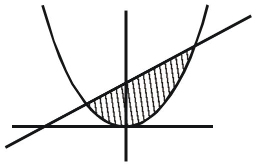
$\left(\frac{4}{3}, 2e\right)$ lies on it

Option (1)

5. Ans. (2)

$x = 4y - 2$ & $x^2 = 4y$

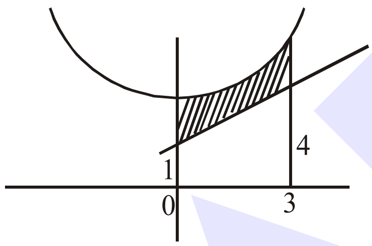
$\Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$



$x = 2, -1$

So, $\displaystyle\int_{-1}^{2}\left(\frac{x+2}{4} - \frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{9}{8}$

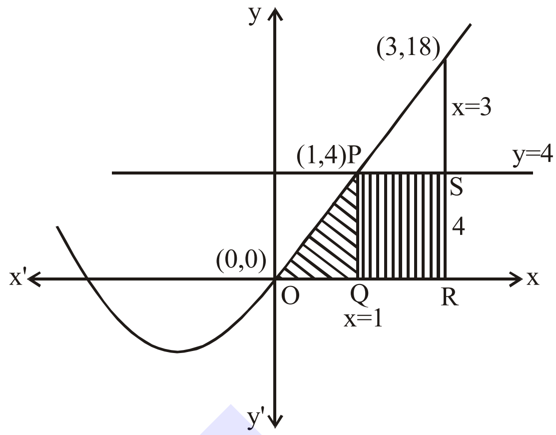
6. Ans. (2)



Req. area = $\displaystyle\int_0^3 (x^2+2)dx - \frac{1}{2}.5.3 = 9 + 6 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$

7. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



Required Area

$$= \int_0^1 (x^2 + 3x)dx + \text{Area of rectangle PQRS}$$

$$= \frac{11}{6} + 8 = \frac{59}{6}$$

8. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $S(\alpha) = \{(x,y) : y^2 \le x, 0 \le x \le \alpha\}$

$$A(\alpha) = 2\int_0^{\alpha} \sqrt{x}\,dx = 2\alpha^{\frac{3}{2}}$$

$$A(4) = 2 \times 4^{3/2} = 16$$

$$A(\lambda) = 2 \times \lambda^{3/2}$$

$$\frac{A(\lambda)}{A(4)} = \frac{2}{5} \Rightarrow \lambda = 4.\left(\frac{4}{25}\right)^{1/3}$$

9. Official Ans. by NTA (2)

Sol. $x^2 \le y \le x + 2$

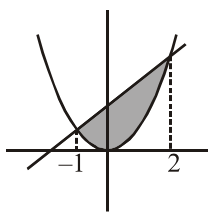
$x^2 = y$; $y = x + 2$

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x - 1) = 0$

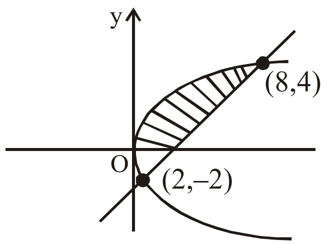
$x = 2, -1$



Area = $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x+2) - x^2\,dx = \frac{9}{2}$

10. Official Ans. by NTA (2)

Sol.



$y^2 = 2x$

$x - y - 4 = 0$

$(x-4)^2 = 2x$

$x^2 + 16 - 8x - 2x = 0$

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$x = 8, 2$

$y = 4, -2$

$$A = \int_{-2}^{4}\left(y + 4 - \frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$= \frac{y^2}{2}\bigg|_{-2}^{4} + 4y\big|_{-2}^{4} - \frac{y^3}{6}\bigg|_{-2}^{4}$$

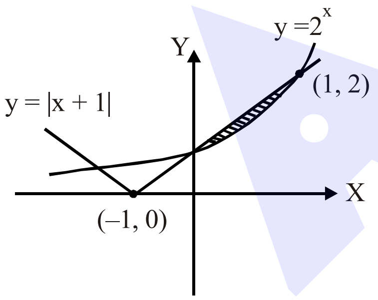
$$= (8-2) + 4(6) - \frac{1}{6}(64+8)$$

$= 6 + 24 - 12 = 18$

11. Official Ans. by NTA (1)

Sol. Required Area

$$\int_0^1 \left((x+1) - 2^x\right)dx$$



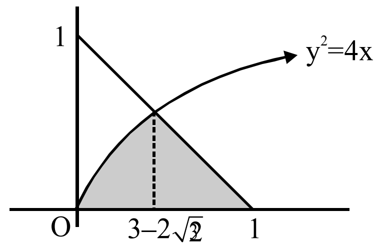
$$= \left(\frac{x^2}{2} + x - \frac{2^x}{\ln 2}\right)_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\ln 2}\right) - \left(0 + 0 - \frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$$

12. Official Ans. by NTA (3)

Sol. $\{(x, y) : y^2 \le 4x,\ x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$



$$A \int_0^{3-2\sqrt{2}} 2\sqrt{x}\,dx + \frac{1}{2}\left(1 - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)\right)\left(1 - (3 - 2\sqrt{2})\right)$$

$$= \frac{2[x^{3/2}]_0^{3-2\sqrt{2}}}{3/2} + \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2} - 2\right)\left(2\sqrt{2} - 2\right)$$

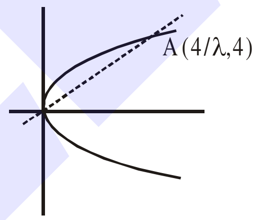
$$= \frac{8\sqrt{2}}{3} + \left(-\frac{10}{3}\right)$$

$a = \dfrac{8}{3}$, $b = -\dfrac{10}{3}$

$a - b = 6$

13. Official Ans. by NTA (1)

Sol.



$$\text{Area } = \frac{1}{9} = \int_0^{\frac{4}{\lambda}}\left(\sqrt{4\lambda x} - \lambda x\right)dx$$

$$\Rightarrow \lambda = 24$$